Quantifier la mututalisation

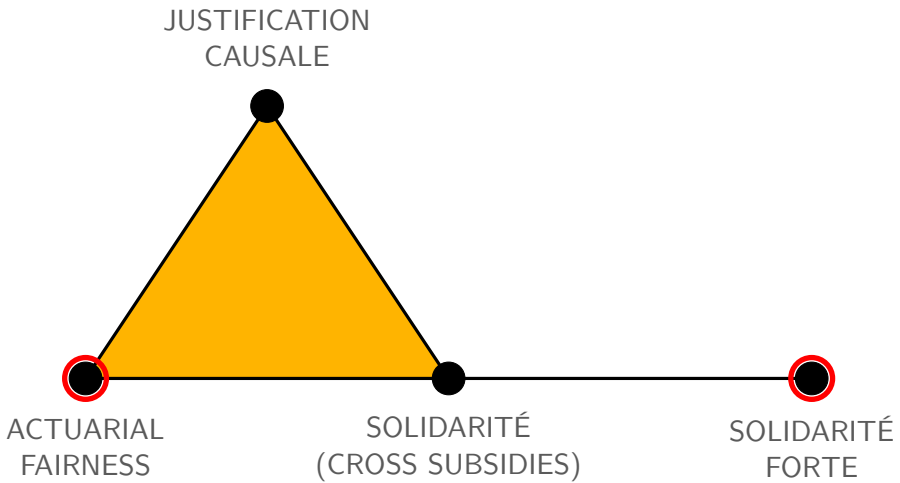
Arthur Charpentier & Laurence Barry

Séminaire de la Chaire PARI – Septembre 2026

- [Charpentier and Barry, 2026] *Quantifying Portfolio Demutualization: A Benchmark-Relative Pooling–Profiling Scale*
- Plus la prime reflète finement le risque individuel, moins les assurés se subventionnent entre eux.
- Comment mesurer ce degré de "démutualisation" ?
- [Noumedem Djieuzem, 2022] *De la communauté à l'individu : Quantifier pour comprendre l'impact des pratiques actuarielles sur la mutualisation*
- Idée de regarder une "quantité d'information"
- Variance $\rightarrow$ Entropie $\rightarrow$ Entropie Algorithmique / compplexité de Kolmogorov

Quelles dimensions ? (en lien avec la discrimination)

- Série d'articles [Côté et al., 2025, Charpentier et al., 2026, Côté et al., 2026]



Mesures (de risque) et indices (d'inégalité)

Mesures de risques $\mathcal{R}$: $\mathcal{F}_Y \to \mathbb{R}$

perte (distribution) — perte (variable aléatoire) — montant monétaire

- homogène de degré 1, $\mathcal{R}(\lambda \cdot Y) = \lambda \cdot \mathcal{R}(Y)$, $\forall \lambda > 0$.
- si $Y \overset{\mathcal{L}}{=} Z$, $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(Z)$ (i.e. $\mathcal{R}$ est basé sur la distribution F_Y et pas Y)

Indices d'inégalité $\mathcal{I}$: $\mathcal{F}_Y \to [0,1]$, ou plus souvent $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$

revenu (distribution) — revenu / richesse — échantillon — "unit scale"

- homogène de degré 0, $\mathcal{I}(\lambda y_1, \cdots, \lambda y_n) = \mathcal{I}(y_1, \cdots, y_n)$, $\forall \lambda > 0$.
- "anonymisation", $\mathcal{I}(y_1, \cdots, y_n) = \mathcal{I}(y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(n)})$, $\forall$ permutation σ.

Mesures (de risque) et indices (d'inégalité)

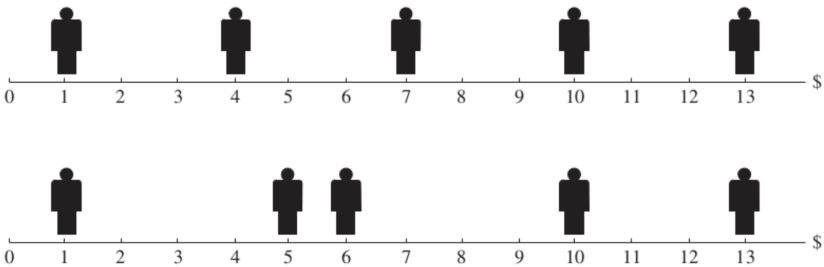
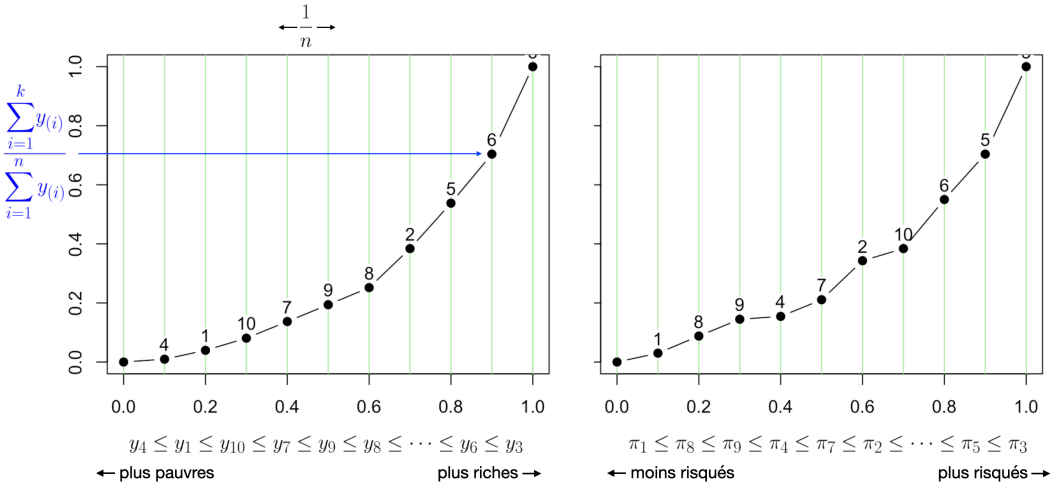


Figure 1.1. A simple distributional experiment.

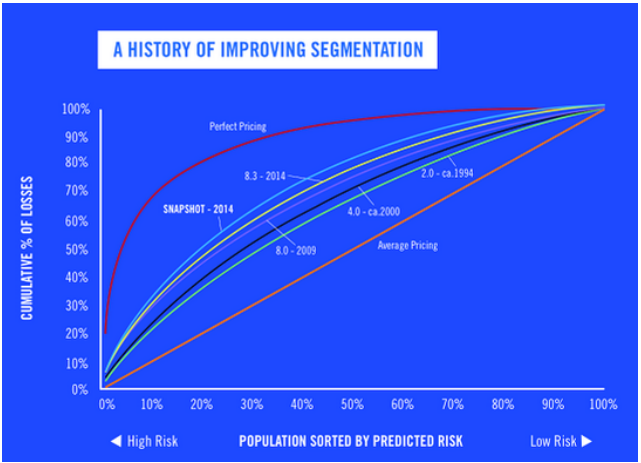
via [Atkinson, 2015], e.g., $\mathcal{I}(y_1, \cdots, y_n) \overset{?}{\leqslant} \mathcal{I}(z_1, \cdots, z_n)$ (transfert de Pigou-Dalton).

Courbes de Lorenz, indice de Gini, et tarification



voir [Frees et al., 2011, Frees et al., 2013]

Courbes de Lorenz, indice de Gini, et tarification



via https://www.progressive.com/jobs/analyst-program/.

Plan du papier

(Trop long) Préambule

La tarification des assurances : entre mutualisation et personalisation

Quantifier la démutualisation d'un portefeuille relativement à un benchmark

Diagnostics opérationnels, inférence et parité entre groupes

Illustration sur données simulées

Application sur données réelle (assurance auto)

Conclusion

La tarification des assurances : entre mutualisation et personalisation

Introduction

- L'assurance est à la fois une institution de mutualisation et une institution de classification.
- Le pooling transforme des pertes individuelles incertaines en régularités collectives exploitables.
- La segmentation réduit certains transferts entre risques hétérogènes, mais ne supprime pas toute mutualisation.
- **La promesse contemporaine est un déplacement des classes de risque vers des profils plus individualisés** .
  [Cevolini and Esposito, 2020, Barry and Charpentier, 2020]
- Les diagnostics classiques éclairent le classement ou la calibration, mais pas la position pooling–profiling complète.
  [Frees et al., 2011, Frees et al., 2013, Denuit et al., 2019]
- Contribution : mesurer séparément la différenciation marginale, l'allocation policy-by-policy et les transferts. relatifs.

L'assurance, une gestion collective de l'incertitude

- L'assurance transforme l'incertitude individuelle en régularité collective observable. [Hacking, 1990, Desrosières, 2008, Ewald, 1986]
- Le pool est constitutif : sans mutualisation, la loi des grands nombres n'a pas d'objet assurantiel.
- L'individu est traité comme une observation dans une population, non comme un risque parfaitement isolé. [Ewald, 1986]
- **La prime des assurés non sinistrés finance les pertes de ceux qui en subissent** : ce n'est pas un défaut, mais le mécanisme.
- Cette logique correspond à la *chance solidarity* : partage de la malchance entre risques comparables.
  [Thiery and Van Schoubroeck, 2006, Lehtonen and Liukko, 2015]
- Question centrale :
  combien d'hétérogénéité est tarifée, combien reste poolée,
  et qui supporte les transferts ?

Segmentation et construction de classes homogènes

- La classification est la réponse actuarielle standard à l'hétérogénéité et au risque d'antisélection.
- Un tarif fondé sur X cherche à approcher $\mathbb{E}[Y \mid X]$.
- La segmentation améliore l'adéquation actuarielle en réduisant l'hétérogénéité résiduelle dans les classes. [De Wit and Van Eeghen, 1984]
- Mais les classes ne sont pas naturelles : elles dépendent des données, variables, modèles et contraintes réglementaires. [Barry and Charpentier, 2020]
- Bonus–malus et crédibilité illustrent une position intermédiaire : on différencie sans abolir le raisonnement collectif.
- Le profiling n'est donc pas l'absence de groupe ; c'est l'usage du groupe comme instrument de prédiction individuelle.

Solidarity, cross-subsidies, and subsidy aversion

- La segmentation est contestée parce qu'elle combine adéquation actuarielle, égalité de traitement et accès à la couverture.
- Du point de vue actuariel, deux risques égaux devraient payer la même prime, et deux risques différents des primes différentes.
- Mais toute subvention croisée n'a pas le même statut normatif.
- Il faut distinguer solidarité de chance, solidarité de risque et solidarité de revenu. [Thiery and Van Schoubroeck, 2006, Lehtonen and Liukko, 2011, Lehtonen and Liukko, 2015]
- La *subsidy aversion* ne suffit pas à décider quelles variables doivent être tarifées. [Frézal and Barry, 2019, Meyers and Van Hoyweghen, 2018]
- Les indices proposés mesurent des déplacements et des transferts ; ils ne disent pas si ces déplacements sont justes.

Big data and the promise of individualized risk

- Big data, machine learning et objets connectés promettent une tarification plus fine et plus dynamique.
- En assurance automobile, la télématique observe kilométrage, freinage, vitesse, horaires ou contexte de conduite.
  [Paefgen et al., 2013, Baecke and Bocca, 2017, Verbelen et al., 2018]
- Mais les signaux continus sont souvent agrégés en variables puis réinsérés dans des structures tarifaires classiques.
- Plus d'information ne signifie pas mécaniquement plus de granularité ni moins de pooling. [Eling et al., 2024]
- L'asymétrie informationnelle peut même s'inverser : l'assureur infère des informations que l'assuré ne maîtrise pas.
  [Brunnermeier et al., 2025, Eling et al., 2024]
- Le point empirique est donc monétaire : quelle différenciation le tarif produit-il effectivement ?

Demutualization as a concern, demutualization as a measurable object

- Le mot **“démutualisation”** peut désigner des phénomènes très différents : statut juridique, fragmentation, exclusion, responsabilisation.
- Ici, **on l’utilise dans un sens tarifaire** : déplacement d’un pooling vers un profiling relatif à un benchmark.
- Un tarif est plus démutualisé si les primes suivent davantage $\mathbb{E}[Y \mid X]$, si moins d’hétérogénéité reste poolée, et si les transferts diminuent.
- L’objet est volontairement conditionnel : portefeuille fixé, poids fixés, benchmark explicite.
- Cette définition sépare la mesure de l’évaluation normative : pooling et profiling peuvent chacun être défendables ou contestables.

Quantifier la démutualisation d'un portefeuille relativement à un benchmark

Portefeuille, benchmark et points extrêmes

- Considérons un portefeuille de n assurés, avec des **poids $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$**, tels que $\boldsymbol{w}^\top \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.
- On note **$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ le vecteur des primes pures du benchmark**, et **$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ le tarif qu'on souhaite évaluer**.
- La moyenne du benchmark est

$$\bar{\theta} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} w_i \theta_i.$$

- Le benchmark est une référence opérationnelle explicite, et pas une mesure intrinsèque ou indépendante du modèle du risque individuel [Desrosières, 2008, Barry and Charpentier, 2020].

Vecteurs tarifaires équilibrés et points extrêmes

- Un vecteur monétaire $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ **est équilibré relativement à** $\boldsymbol{\theta}$ si

$$\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\theta} = \bar{\theta}.$$

  De manière équivalente,

$$\boldsymbol{w}^\top (\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\pi_i - \theta_i) = 0.$$

- Les deux points extrêmes, pooling et profiling, sont

$$\boldsymbol{\pi}^{\text{pool}} = \bar{\theta}\mathbf{1} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\pi}^{\text{prof}} = \boldsymbol{\theta}.$$

- Le chemin canonique entre pooling et profiling est

$$\boldsymbol{\pi}^{(a)} = (1-a)\bar{\theta}\mathbf{1} + a\boldsymbol{\theta}, \qquad 0 \leq a \leq 1.$$

- Le long de ce chemin, a représente la fraction de l'hétérogénéité du benchmark qui est répercutée dans les primes.

Propriétés communes I

Relativité au benchmark

La quantité $D(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w})$ mesure la démutualisation relativement au benchmark $\boldsymbol{\theta}$ choisi. Modifier $\boldsymbol{\theta}$ revient donc à modifier l'objet mesuré.

Normalisation aux extrêmes

Pour un benchmark non constant,

$$D(\boldsymbol{\pi}^{\text{pool}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad \text{et} \qquad D(\boldsymbol{\pi}^{\text{prof}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 1 .$$

Calibration sur le chemin canonique

Pour tout $a \in [0, 1]$,

$$D(\boldsymbol{\pi}^{(a)}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = a .$$

Propriétés communes II

Invariance à l'échelle monétaire

Pour tout $c > 0$,

$$D(c\boldsymbol{\pi}; c\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = D(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) .$$

Invariance par permutation commune

Pour toute permutation commune σ,

$$D(\boldsymbol{\pi}_\sigma; \boldsymbol{\theta}_\sigma, \boldsymbol{w}_\sigma) = D(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) .$$

Propriétés communes II

Continuité

Si $\boldsymbol{\pi}^{(m)} \to \boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\theta}^{(m)} \to \boldsymbol{\theta}$, et si le benchmark reste non dégénéré, alors

$$D(\boldsymbol{\pi}^{(m)}; \boldsymbol{\theta}^{(m)}, \boldsymbol{w}) \to D(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) \, .$$

Definition (Indice couplé)

Un **indice couplé** conserve l'appariement observé entre π_i et θ_i.
Il doit satisfaire

$$D^{\mathrm{cpl}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_i = \theta_i \quad \textbf{pour tout } i \textbf{ tel que } w_i > 0 \, .$$

Démutualisation couplée

Definition (Fonctionnelles homogènes pondérées)

Une fonctionnelle homogène pondérée est une famille

$$g_{\boldsymbol{w}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$$

telle que :

- $g_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{z}) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{z} = 0$;
- $g_{\boldsymbol{w}}(c\boldsymbol{z}) = |c| g_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{z})$;
- $g_{\boldsymbol{w}}$ est continue ;
- $g_{\boldsymbol{w}_\sigma}(\boldsymbol{z}_\sigma) = g_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{z})$.

Elle induit l'écart pondéré

$$d_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = g_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Indices couplés

Definition (Mutualisation résiduelle et démutualisation couplées)

Si $d_{\boldsymbol{w}}(\bar{\theta}\mathbf{1}, \boldsymbol{\theta}) > 0$, on définit

$$S_d^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = \frac{d_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})}{d_{\boldsymbol{w}}(\bar{\theta}\mathbf{1}, \boldsymbol{\theta})}$$

et

$$D_d^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 1 - \frac{d_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})}{d_{\boldsymbol{w}}(\bar{\theta}\mathbf{1}, \boldsymbol{\theta})}.$$

- Comme

$$\boldsymbol{\pi}^{(a)} - \boldsymbol{\theta} = (1 - a)(\bar{\theta}\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta}),$$

l'homogénéité positive implique

$$D_d^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}^{(a)}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = a.$$

Indices couplés

- Pour la norme L^p pondérée,

$$\|\boldsymbol{z}\|_{p,\boldsymbol{w}} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i |z_i|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

on note l'indice correspondant D_p^{cpl}.

  - $p = 1$: interprétation monétaire directe ;
  - $p = 2$: sensibilité plus forte aux écarts importants.

- L'indice couplé utilisé est

$$D_p^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 1 - \frac{\|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}}}{\|\bar{\theta}\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}}}.$$

Interprétation en termes de transferts

Pour un tarif équilibré, le volume total des transferts positifs est

$$T(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\pi_i - \theta_i)_+ .$$

L'équilibre

$$\sum_i w_i(\pi_i - \theta_i) = 0$$

implique

$$T(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\theta_i - \pi_i)_+ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i|\pi_i - \theta_i|.$$

Interprétation exacte

$$D_1^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = 1 - \frac{T(\boldsymbol{\pi})}{T(\boldsymbol{\pi}^{\text{pool}})}$$

Démutualisation distributionnelle

- D_1^{cpl} est la fraction du volume de transferts du pooling complet qui est supprimée par le tarif.
- $1 - D_1^{\text{cpl}}$ est la fraction de mutualisation relative au benchmark qui subsiste.
- Un indice distributionnel compare les distributions marginales des primes et des risques du benchmark.
- Il ignore l'identité de l'assuré auquel chaque prime est attribuée.

Démutualisation distributionnelle

Definition (Distributions empiriques)

Définissons les mesures empiriques

$$\mu_{\boldsymbol{\pi}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta_{\pi_i} \qquad \text{et} \qquad \mu_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta_{\theta_i}.$$

Soit ρ une mesure d'écart non négative séparant les mesures de probabilité :

$$\rho(\mu, \nu) = 0 \iff \mu = \nu.$$

Si $\rho(\delta_{\bar{\theta}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}}) > 0$, on définit

$$S_\rho^{\text{dist}} = \frac{\rho(\mu_{\boldsymbol{\pi}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}})}{\rho(\delta_{\bar{\theta}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}})}$$

et

$$D_\rho^{\text{dist}} = 1 - \frac{\rho(\mu_{\boldsymbol{\pi}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}})}{\rho(\delta_{\bar{\theta}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}})}.$$

Démutualisation de Wasserstein

- Un indice distributionnel vérifie

$$D_\rho^{\text{dist}}(\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{w}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{\boldsymbol{\pi}} = \mu_{\boldsymbol{\theta}}.$$

- Nous retenons donc la distance de Wasserstein,

$$\rho = W_p \quad \text{où} \quad W_p^p(\mu,\nu) = \int_0^1 |Q_\mu(u) - Q_\nu(u)|^p \, du,$$

[Villani, 2009, Santambrogio, 2015, Panaretos and Zemel, 2020, Peyré and Cuturi, 2019].

- L'indice distributionnel utilisé est

$$D_p^W(\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{w}) = 1 - \frac{W_p(\mu_{\boldsymbol{\pi}},\mu_{\boldsymbol{\theta}})}{W_p(\delta_{\bar{\theta}},\mu_{\boldsymbol{\theta}})}.$$

Propriétés des indices retenus

Proposition (Propriétés des indices retenus)

Soit $p \geq 1$ et supposons $\boldsymbol{\theta}$ non constant. L'indice couplé pondéré D_p^{cpl} et l'indice marginal de Wasserstein D_p^W vérifient :

- *la normalisation aux extrêmes ;*
- *la calibration sur le chemin canonique ;*
- *l'invariance à l'échelle monétaire ;*
- *l'invariance par permutation commune ;*
- *la continuité.*

De plus,

$$\begin{cases} D_p^{\mathrm{cpl}}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = 1 & \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\theta} \quad \text{pour les assurés de poids positif,} \\ D_p^{W}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = 1 & \Longleftrightarrow \quad \mu_{\boldsymbol{\pi}} = \mu_{\boldsymbol{\theta}}. \end{cases}$$

Vision couplée versus vision marginale/distributionnelle

Vision couplée

L'appariement observé au niveau individuel est conservé :

$$(\pi_i, \theta_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Chaque assuré reçoit-il une prime proche de son propre risque benchmark ?
L'écart pertinent est

$$\|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}} = \left(\sum_i w_i |\pi_i - \theta_i|^p \right)^{1/p}.$$

Cet indice est sensible à une réallocation des primes entre assurés.

Vision marginale/distributionnelle

L'identité des assurés est ignorée :

$$\mu_{\boldsymbol{\pi}} = \sum_i w_i \delta_{\pi_i}, \qquad \mu_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_i w_i \delta_{\theta_i}$$

La distribution des primes reproduit-elle la distribution du benchmark ?
L'écart pertinent est

$$W_p(\mu_{\boldsymbol{\pi}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\int_0^1 |Q_\mu(u) - Q_\nu(u)|^p \, du \right)^{1/p}$$

Cet indice ne change pas lorsque les mêmes primes sont réattribuées à d'autres assurés.

Vision couplée versus vision marginale/distributionnelle

Si

$$\boldsymbol{\theta} = (100, 200, 300), \qquad \boldsymbol{\pi} = (300, 200, 100),$$

et si $\boldsymbol{w} \propto \mathbf{1}$, alors

$$\mu_{\boldsymbol{\pi}} = \mu_{\boldsymbol{\theta}} \quad \Longrightarrow \quad D_p^W = 1,$$

mais

$$\boldsymbol{\pi} \neq \boldsymbol{\theta} \quad \Longrightarrow \quad D_p^{\text{cpl}} < 1.$$

Il faut donc **quantifier le désalignement possible** dans l'allocation.

Diagnostics opérationnels, inférence et parité entre groupes

Construction du benchmark et équilibrage

- Le benchmark $\boldsymbol{\theta}$ est une frontière opérationnelle de profiling : dans une simulation, on utilise l'oracle ; dans une application, il est estimé.
- Avant de calculer les indices, les primes candidates sont équilibrées sur la moyenne du benchmark, généralement par un équilibrage multiplicatif des primes techniques pures.

Écart d'allocation

Le coût de l'appariement effectivement observé, assuré par assuré, est

$$\|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}}^{p}.$$

Le coût du meilleur appariement possible est

$$W_p^p(\mu_{\boldsymbol{\pi}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}}).$$

On définit donc

$$M_p(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = \|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}}^{p} - W_p^p(\mu_{\boldsymbol{\pi}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}}) \geq 0.$$

Sa version normalisée est

$$\overline{M}_p(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{M_p(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})}{\|\bar{\theta}\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta}\|_{p,\boldsymbol{w}}^{p}}.$$

Pour $p = 1$,

$$\overline{M}_1 = D_1^W - D_1^{\text{cpl}}.$$

Interprétation

$\overline{M}_1$ est la part normalisée de la différenciation monétaire qui n'est pas attribuée aux mêmes assurés que dans le benchmark.

L'écart d'allocation en L^1

Dans le cas L^1, l'écart d'allocation normalisé vérifie exactement

$$\overline{M}_1(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) = D_1^W(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta}) - D_1^{\mathrm{cpl}}(\boldsymbol{\pi}) \, .$$

Ainsi, l'écart vertical entre les deux coordonnées reportées est exactement le coût monétaire normalisé associé à une réallocation optimale des primes.

- D_1^W mesure la différenciation monétaire marginale.
- D_1^{cpl} mesure l'alignement au niveau individuel.
- Leur différence mesure le désalignement de l'allocation.

Message

Un tarif peut avoir presque la bonne distribution de primes, tout en attribuant les primes élevées et faibles à des assurés différents de ceux du benchmark.

L'écart d'allocation en L^2

Soit

$$V_\theta = \sum_{i=1}^{n} w_i(\theta_i - \bar{\theta})^2 = W_2^2(\delta_{\bar{\theta}}, \mu_{\boldsymbol{\theta}}), \qquad V_\theta > 0.$$

L'identité fondée sur la perte de covariance donne

$$\left(1 - D_2^{\text{cpl}}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})\right)^2 - \left(1 - D_2^{W}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})\right)^2 = \frac{M_2(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})}{V_\theta}.$$

- L'indice marginal de Wasserstein mesure l'ampleur et la forme de la dispersion des primes.
- L'indice couplé vérifie également si cette dispersion est attribuée aux bons assurés.
- L'écart entre les carrés des mutualisations résiduelles est exactement le désalignement L^2 normalisé.

Transferts entre groupes

Soit A_i une variable définissant un groupe : caractéristique protégée, région, décile de risque, ou toute autre partition pertinente pour l'audit.
Définissons le transfert moyen du groupe relativement au benchmark :

$$\Delta_a(\boldsymbol{\pi}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{w}}(\pi_i - \theta_i \mid A_i = a).$$

- $\Delta_a(\boldsymbol{\pi}) > 0$: le groupe a est contributeur net relativement au benchmark.
- $\Delta_a(\boldsymbol{\pi}) < 0$: le groupe a est bénéficiaire net relativement au benchmark.
- Les écarts entre les Δ_a montrent comment le pooling ou une correction de parité réallouent les transferts.

Diagnostics de Gini

Pour un vecteur positif du portefeuille $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, le **coefficient de Gini** pondéré est

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_i \sum_j w_i w_j |x_i - x_j|}{2 \sum_i w_i x_i}.$$

Le coefficient de Gini mesure l'inégalité ou la concentration des primes [Atkinson, 1970].
En tarification d'assurance, les courbes de Lorenz ordonnées classent les assurés selon une relativité [Frees et al., 2011, Frees et al., 2013].
Si $\boldsymbol{\pi}$ est équilibré (de moyenne $\bar{\theta}$), on peut définir le ratio de Gini relatif au benchmark est

$$D^{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) = \frac{\mathcal{G}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\pi})}{\mathcal{G}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})},$$

Diagnostic de Gini

Table 1: Comparison des trois indices de démutualisation.

Property	D_p^{cpl}	D_p^{W}	D^{G}
Pooling endpoint	0	0	0
Profiling endpoint	1	1	1
Canonical path $\boldsymbol{\pi}^{(a)}$	a	a	a
Monetary-scale invariance	✓	✓	✓
Joint relabelling invariance	✓	✓	✓
Continuity	✓	✓	✓
Characterization of value 1	$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\theta}$	$\mu_{\boldsymbol{\pi}} = \mu_{\boldsymbol{\theta}}$	$\mathcal{G}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\pi}) = \mathcal{G}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\theta})$
Information retained	Policy-level allocation	Marginal distribution	Scalar dispersion

Calibration : nécessaire pour l'interprétation, mais insuffisante

Tirons un assuré aléatoirement selon les poids w :

$$\mathbb{P}(I = i) = w_i, \qquad \Pi = \pi_I, \qquad \Theta = \theta_I.$$

Un tarif $\boldsymbol{\pi}$ est calibré relativement au benchmark $\boldsymbol{\theta}$ lorsque

$$\mathbb{E}(\Theta \mid \Pi) = \Pi.$$

Mais les deux situations extrêmes sont calibrées :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} = \bar{\theta}\mathbf{1} & \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(\Theta \mid \Pi) = \bar{\theta} = \Pi, \\ \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\theta} & \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(\Theta \mid \Pi) = \Pi. \end{cases}$$

La calibration ne permet donc pas de distinguer le pooling complet du profiling complet.
Elle mesure l'adéquation conditionnelle, mais pas la quantité d'hétérogénéité du benchmark qui est répercutée dans les primes
[Denuit et al., 2019, Wüthrich and Merz, 2023].

La parité de groupe comme intervention de mutualisation

- Une correction de parité entre groupes est utilisée ici comme test de sensibilité des coordonnées de mutualisation.
- Si les groupes sensibles ont des distributions de risque benchmark différentes, imposer l'égalité de leurs distributions conditionnelles de primes ne peut pas préserver dans les prix toutes les différences de benchmark entre groupes.
- Une partie de cette différence doit nécessairement réapparaître sous forme de transferts relativement au benchmark.
- L'intervention n'est donc pas seulement une étape de post-traitement visant la fairness : c'est également un mécanisme qui réalloue les transferts relativement au benchmark.

  [Frézal and Barry, 2019, Charpentier, 2024, Charpentier et al., 2023]

Correction de parité

Soit $S \in \{0,1\}$ l'attribut sensible, avec

$$p_s = \mathbb{P}(S = s).$$

Notons Q_s la fonction quantile de la prime conditionnellement à $S = s$.
Le barycentre de Wasserstein unidimensionnel a pour fonction quantile

$$Q_B(u) = p_0 Q_0(u) + p_1 Q_1(u), \qquad u \in (0,1).$$

Si U_S désigne le rang conditionnel de la prime dans son groupe, la prime corrigée est

$$\pi^{\text{par}} = Q_B(U_S).$$

Alors

$$\mathcal{L}(\pi^{\text{par}} \mid S = 0) = \mathcal{L}(\pi^{\text{par}} \mid S = 1).$$

- La transformation est monotone à l'intérieur de chaque groupe.
- Elle égalise les distributions conditionnelles des primes.
- Elle peut cependant modifier l'allocation assuré par assuré.

CharpentierHuRatz2023,Charpentier2024, LindholmRichmanTsanakasWuthrich2024

Parité de groupe et transferts

Si un tarif équilibré possède la même distribution conditionnelle dans les deux groupes, alors

$$\mathbb{E}(\Pi \mid S = 0) = \mathbb{E}(\Pi \mid S = 1) = \bar{\theta}.$$

Le transfert moyen dans le groupe s est donc

$$\Delta_s(\pi) = \mathbb{E}(\Pi - \Theta \mid S = s) = \bar{\theta} - \mathbb{E}(\Theta \mid S = s).$$

Par conséquent,

$$\Delta_1(\pi) - \Delta_0(\pi) = \mathbb{E}(\Theta \mid S = 0) - \mathbb{E}(\Theta \mid S = 1).$$

Égaliser les distributions de primes ne fait donc pas disparaître la différence de benchmark entre groupes : elle est déplacée du barème tarifaire vers les transferts.

Effet sur la démutualisation couplée

Considérons le chemin de shrinkage à partir du benchmark :

$$\pi^{(a)} = (1-a)\bar{\theta} + a\Theta.$$

Sa correction barycentrique est

$$\pi^{(a)}_{\text{par}} = (1-a)\bar{\theta} + aQ_B(U_S).$$

Pour tout $p \geq 1$,

$$\left\| \pi^{(a)}_{\text{par}} - \Theta \right\|_p \geq \left\| \pi^{(a)} - \Theta \right\|_p.$$

Ainsi,

$$D_p^{\text{cpl}}\left(\pi^{(a)}_{\text{par}}\right) \leq D_p^{\text{cpl}}\left(\pi^{(a)}\right) = a.$$

Pour $p = 1$

La correction de parité restaure une partie des transferts relatifs au benchmark qui avaient été supprimés par le profiling.

Illustration sur données simulées

Illustration sur données simulées

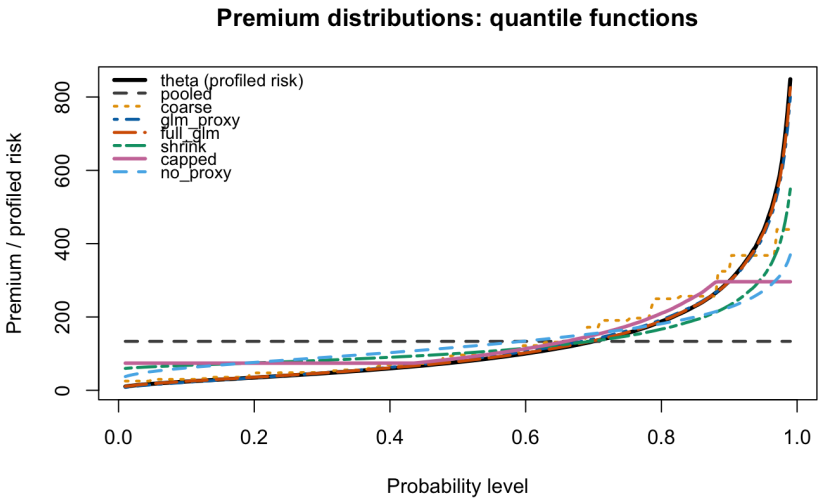


Illustration sur données simulées

- **Pooling :** une prime unique est facturée à tous les assurés,

$$\pi_i^{\text{pool}} = \bar{\theta}.$$

- **Tarif par classes :** les assurés sont regroupés en grandes classes d'âge, de puissance du véhicule et de risque géographique ; chaque assuré paie la moyenne empirique de sa cellule.
- **GLM avec proxies :** le GLM utilise $X_1, \ldots, X_4$, mais exclut les attributs sensibles A et B ; néanmoins, X_3 et X_4 jouent le rôle de proxies de ces attributs.
- **GLM complet :** le GLM utilise $X_1, \ldots, X_4$, les deux attributs sensibles A et B, ainsi que l'interaction $X_3 B$ présente dans le processus générateur des données.
- **Shrinkage :** la prime issue du GLM complet est rapprochée de la prime moyenne,

$$\pi_i^{\text{shrink}} = (1-\rho)\bar{\theta} + \rho\pi_i^{\text{full}}, \qquad \rho = 0.60.$$

Illustration sur données simulées

- **Tarif plafonné :** la prime du GLM complet est bornée entre 50% et 200% de la prime issue du pooling,

$$\pi_i^{\text{cap}} = \min\left\{2\bar{\theta},\ \max\left(0.5\bar{\theta}, \pi_i^{\text{full}}\right)\right\}.$$

- **GLM sans proxy :** le GLM utilise uniquement X_1 et X_2, en excluant à la fois les attributs sensibles et les variables proxies les plus fortes, X_3 et X_4.
- **Oracle :** chaque assuré paie son espérance conditionnelle réelle de sinistre,

$$\pi_i^{\text{oracle}} = \theta_i = \mathbb{E}(Y_i \mid \boldsymbol{X}_i, A_i, B_i).$$

Illustration sur données simulées

Table 2: Pooling–profiling metrics for the synthetic portfolio. The exact identity $\overline{M}_1 = D_1^W - D_1^{\mathrm{cpl}}$ gives the normalized L^1 allocation mismatch; $q_{.95}$ is the 95th premium quantile.

Pricing rule	D_1^{cpl}	D_2^{cpl}	D_1^W	D_2^W	$\overline{M}_1$	sd($\boldsymbol{\pi}$)	$q_{.95}$
Pooled	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	133.539
Coarse tariff	0.392	0.238	0.703	0.423	0.311	113.041	367.923
GLM with proxies	0.863	0.836	0.950	0.927	0.087	165.197	420.717
Full GLM	0.961	0.949	0.979	0.965	0.018	170.208	428.463
Shrinkage	0.590	0.581	0.591	0.582	0.001	102.180	310.589
Capped tariff	0.549	0.292	0.549	0.292	0.000	79.639	296.200
No-proxy GLM	0.145	0.086	0.473	0.355	0.328	70.978	271.291
Oracle	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	175.394	433.418

Real-data application

Portefeuille automobile et benchmark

- Portefeuille `ausprivauto0405` du package `CASdatasets`.
- Les expositions sont utilisées comme poids.
- Les primes sont des primes techniques pures annuelles.
- Toutes les prédictions sont obtenues par cross-fitting (k-fold, $k = 5$).
- Le benchmark principal est un XGBoost cross-fitté utilisant `VehValue`, `VehAge`, `VehBody`, `DrivAge` et `Gender`.
- Les tarifs candidats sont des GLM et XGBoost (moins souple que le benchmark), avec ou sans la variable sensible $S =$ `Gender`.

Statut du benchmark

Le benchmark est une frontière opérationnelle de profiling, pas un risque individuel observé ni un oracle.

GLM et XGBoost racontent deux histoires différentes

Tarif	D_1^{cpl}	D_1^{W}	$\overline{M}_1$
GLM, sans S	0.329	0.887	0.559
GLM, avec S	0.332	0.891	0.558
XGBoost, sans S	0.661	0.808	0.147
XGBoost, avec S	0.677	0.809	0.132

- Les GLM reproduisent largement la dispersion marginale du benchmark, mais avec un fort mismatch d'allocation.
- Les XGBoost sont un peu moins proches marginalement, mais beaucoup mieux alignés policy-by-policy.
- La dispersion de la prime ne suffit donc pas à mesurer la démutualisation.

La correction pour équité agit surtout par réallocation

Tarif	$\Delta D_1^{\mathrm{cpl}}$	ΔD_1^{W}	$\Delta \overline{M}_1$
GLM, sans S	-0.006	$+0.002$	$+0.009$
GLM, avec S	-0.008	$+0.002$	$+0.010$
XGBoost, sans S	-0.004	0.000	$+0.004$
XGBoost, avec S	-0.014	-0.003	$+0.011$
Benchmark	-0.117	-0.009	$+0.108$

- Les écarts conditionnels de primes diminuent fortement.
- La coordonnée marginale D_1^W change peu.
- La coordonnée couplée diminue et le mismatch augmente.
- La correction agit donc surtout par réallocation des primes.

Conclusion

Messages à retenir

1. La mutualisation n'est pas l'absence de classification : elle est la part de l'hétérogénéité du benchmark qui reste non monétisée.

2. La quantité de différenciation marginale et son allocation policy-by-policy sont deux objets distincts :
$$D_1^W \qquad \text{et} \qquad D_1^{\text{cpl}}.$$

3. Leur différence
$$\overline{M}_1 = D_1^W - D_1^{\text{cpl}}$$
mesure le mismatch d'allocation.

4. Sous équilibre, D_1^{cpl} est la fraction du volume de transferts du pooling complet supprimée par le tarif.

5. Les mesures sont benchmark-relatives, descriptives et non normatives.

Références

Atkinson, A. B. (1970).
On the measurement of inequality.
Journal of Economic Theory, 2(3):244–263.

Atkinson, A. B. (2015).
Inequality: What can be done?
Harvard University Press.

Baecke, P. and Bocca, L. (2017).
The value of vehicle telematics data in insurance risk selection processes.
Decision Support Systems, 98:69–79.

Barry, L. and Charpentier, A. (2020).
Personalization as a promise: Can big data change the practice of insurance?
Big Data & Society, 7(1):1–12.

Brunnermeier, M. K., Lamba, R., and Segura-Rodriguez, C. (2025).
Inverse selection.
Technical report, SSRN.
SSRN 3584331.

Références

Cevolini, A. and Esposito, E. (2020).
From pool to profile: Social consequences of algorithmic prediction in insurance.
Big Data & Society, 7(2):1–11.

Charpentier, A. (2024).
Insurance, biases, discrimination and fairness.
Springer.

Charpentier, A. and Barry, L. (2026).
Quantifying portfolio demutualization: A benchmark-relative pooling-profiling scale.
ArXiv, 2609.23294.

Charpentier, A., Côté, O., and Côté, M.-P. (2026).
Governing the fairness trilemma in insurance pricing: Actuarial adequacy, social solidarity and causal legitimacy.
Journal of Business Ethics, Forthcoming.

Références

Charpentier, A., Hu, F., and Ratz, P. (2023).
Mitigating discrimination in insurance with Wasserstein barycenters.
In *Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, pages 161–177. Springer.

Côté, O., Côté, M.-P., and Charpentier, A. (2025).
A scalable toolbox for exposing indirect discrimination in insurance rates.
Casualty Actuarial Society Report.

Côté, O., Côté, M.-P., and Charpentier, A. (2026).
A statistical perspective on fairness in insurance pricing.
Annual Review of Statistics and Its Applications, Forthcoming.

De Wit, G. W. and Van Eeghen, J. (1984).
Rate making and society's sense of fairness.
ASTIN Bulletin, 14(2):151–164.

Denuit, M., Hainaut, D., and Trufin, J. (2019).
Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I: GLMs and Extensions.
Springer.

Références

Desrosières, A. (2008).
L'argument statistique.
Presses des Mines, Paris.

Eling, M., Gemmo, I., Guxha, D., and Schmeiser, H. (2024).
Big data, risk classification, and privacy in insurance markets.
The Geneva Risk and Insurance Review, 49:75–126.

Ewald, F. (1986).
L'état providence.
Grasset, Paris.

Frees, E. W., Meyers, G., and Cummings, A. D. (2011).
Summarizing insurance scores using a gini index.
Journal of the American Statistical Association, 106(495):1085–1098.

Frees, E. W., Meyers, G., and Cummings, A. D. (2013).
Insurance ratemaking and a gini index.
Journal of Risk and Insurance, 81(2):335–366.

Références

Frézal, S. and Barry, L. (2019).
Fairness in uncertainty: Some limits and misinterpretations of actuarial fairness.
Journal of Business Ethics.

Hacking, I. (1990).
The Taming of Chance.
Cambridge University Press, Cambridge.

Lehtonen, T.-K. and Liukko, J. (2011).
The forms and limits of insurance solidarity.
Journal of Business Ethics, 103:33–44.

Lehtonen, T.-K. and Liukko, J. (2015).
Producing solidarity, inequality and exclusion through insurance.
Res Publica, 21(2):155–169.

Meyers, G. and Van Hoyweghen, I. (2018).
Enacting actuarial fairness in insurance: From fair discrimination to behaviour-based fairness.
Science as Culture, 27(4):413–438.

Références

Noumedem Djieuzem, B. D. (2022).
De la communauté à l'individu : quantifier pour comprendre l'impact des pratiques actuarielles sur la mutualisation.
Mémoire d'actuariat.

Paefgen, J., Staake, T., and Thiesse, F. (2013).
Evaluation and aggregation of pay-as-you-drive insurance rate factors: A classification analysis approach.
Decision Support Systems, 56:192–201.

Panaretos, V. M. and Zemel, Y. (2020).
An Invitation to Statistics in Wasserstein Space, volume 6.
Springer.

Peyré, G. and Cuturi, M. (2019).
Computational optimal transport.
Foundations and Trends in Machine Learning, 11(5–6):355–607.

Santambrogio, F. (2015).
Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling.
Birkhäuser, Cham.

Références

Thiery, Y. and Van Schoubroeck, C. (2006).
Fairness and equality in insurance classification.
The Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice, 31(2):190–211.

Verbelen, R., Antonio, K., and Claeskens, G. (2018).
Unravelling the predictive power of telematics data in car insurance pricing.
Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics), 67(5):1275–1304.

Villani, C. (2009).
Optimal Transport: Old and New.
Springer, Berlin.

Wüthrich, M. V. and Merz, M. (2023).
Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications.
Springer.