

LA LOI DES GRANDS NOMBRES ET LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE COMME BASE DE L'ASSURABILITÉ ?

Arthur Charpentier

Maître de conférences à l'Université de Rennes I

L'assurance repose sur le principe de mutualisation des risques : « the contribution of the many to the misfortune of the few ». C'est ce que dit Ewald (1986) : « Le risque est collectif; [...] Ce n'est en effet que sur l'étendue d'une population qu'un risque devient calculable. » D'un point de vue quantitatif, ce principe est souvent relié à la loi des grands nombres, voire au théorème central limite. Pourtant, comme tous les théorèmes mathématiques, ces derniers reposent sur des hypothèses fortes dont on peut se demander si elles sont pertinentes dès lors que l'on parle d'assurabilité.

Introduction

Les théorèmes mathématiques sont des outils très intéressants, car ils ont valeur de loi. S'ils ne permettent pas de garantir qu'un assureur ne fera pas ruine, ils permettent d'obtenir, avec une certaine confiance, des informations quantitatives sur le capital à détenir pour garantir la solvabilité. Mais ces théorèmes ne sont valides que si certaines hypothèses sont vérifiées. Ou, plus précisément, sous des hypothèses d'indépendance entre risques, ces théorèmes permettent d'obtenir certains ordres de grandeur, mais ils ne disent pas – a priori – ce qui se passe si ces hypothèses sont violées. Nous allons reprendre ici la loi des grands nombres (qui donne un sens à la « prime pure ») et au théorème central limite (qui contrôle l'écart entre la charge totale et la prime acquise), en rappelant que si l'hypothèse d'indépendance entre risques n'est pas validée, il est toujours possible d'établir un tarif, mais la marge de

solvabilité (et plus généralement le capital permettant d'éviter une faille) est en revanche très fortement affectée. Tout du moins si le besoin de capital (qui peut être vu comme une mesure de risque) est lié à la volatilité du risque (i.e. sa variance), car ces théorèmes ne nous apprennent que peu de choses sur les quantiles et les VaR (si la variance est infinie, comme cela est souvent le cas pour les grands risques).

Histoire et énoncé des théorèmes limites

L'assurance repose sur les contrats aléatoires. Il n'est alors pas surprenant de voir surgir des théorèmes de probabilité lorsque l'on tente de quantifier le résultat d'un assureur. Car si ce dernier espère faire un bénéfice, il n'est pas impossible (ou improbable) qu'il fasse une perte.

Mais ce sont essentiellement les théorèmes dit « asymptotiques » ou « limites » qui sont importants en assurance¹. En effet, si l'assureur ne vendait qu'un contrat, l'opération se réduirait à un pari : si le risque n'advient pas, l'assureur réalise un petit bénéfice (en encaissant la prime), mais, dans le cas contraire, il pourrait faire une perte (très) importante. Ce pari pourrait alors aisément causer la faillite de l'assureur. Afin de l'éviter, il va essayer de réunir un grand nombre d'assurés, et réaliser une opération de mutualisation : les primes reçues de tous vont permettre d'indemniser les plus malchanceux.

■ La loi des grands nombres

Elle a été introduite par Jacob Bernoulli probablement avant 1700. C'est elle qui, par exemple, justifie l'utilisation des sondages : en interrogeant un nombre important de personnes, on peut estimer des quantités pour la population toute entière. Il s'agit d'un fondement profond de la théorie des probabilités, comme le notait Andreï Kolmogorov : « *La valeur épistémologique de la théorie des probabilités est fondée sur le fait que les phénomènes aléatoires engendrent, à grande échelle, une régularité stricte, où l'aléatoire a, d'une certaine manière, disparu.* » Elle s'énonce de la manière suivante :

Théorème : Considérons des variables indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et de même espérance $E(X_i) = \mu$ finie, alors

$$P(|Sn - n\mu| > n\epsilon) \rightarrow 0$$

où $Sn = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$, quel que soit $\epsilon > 0$.

Sn est alors la charge totale pour l'assureur et $n\mu$ est la prime acquise qu'il fait payer la prime pure à ses assurés. De manière équivalente

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0$$

En termes plus assuranciers, la probabilité que la différence entre le coût moyen (par contrat) et la prime pure soit plus petite que n'importe quelle constante arbitraire tend vers 1 (événement certain) lors que la taille du portefeuille augmente à l'infini.

Formellement, ce théorème (sous cette forme) a été établi par Alexandre Khintchine en 1929 (des preuves beaucoup plus anciennes peuvent être trouvées, mais elles supposent en plus que la variance est finie). Mais ce théorème n'a que peu d'intérêt réel en assurance. La seule chose qu'il dise est que, lorsque l'on construit une table de mortalité, la fréquence de décès à un âge donné doit être très proche de la probabilité de décéder à cet âge si l'échantillon (ou population de référence) est suffisamment grand. Soit formellement

$$P\left(\left|\frac{D_x}{N_x} - q_x\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0$$

pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $N_x \rightarrow \infty$. Ce théorème ne parle pas de risque (ou dans le langage de Markowitz de variance). L'idée que la mutualisation réduit le risque ne vient pas de la loi des grands nombres, mais du théorème central limite.

■ Le théorème central limite

Il est tout aussi ancien que la loi des grands nombres (on peut le faire remonter aux travaux de De Moivre en 1733), même si le terme ne date que de 1920 (sous l'impulsion de Georg Polya), car pour lui ce résultat limite jouait un rôle « central » dans la théorie des probabilités. Adams (2009) et Fisher (2011) retracent l'histoire de ce théorème qui n'apparaît chez de Moivre que sous une version très simplifiée. La version que l'on utilise est plutôt celle proposée par Pierre-Simon de Laplace en 1812. On notera toutefois que Paul Lévy, par exemple, a proposé des extensions intéressantes, en particulier pour les très grands risques. Ce théorème s'énonce lui de la manière suivante :

Théorème : des variables indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et de même espérance $E(X_i) = \mu$ et de même variance $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ finie, alors

$$P(S_n - n\mu < \sigma\sqrt{n} \cdot \beta) \rightarrow \Phi(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, quel que soit β , où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

C'est essentiellement à cause de ce théorème que la loi normale est autant présente en statistique. Et l'interprétation en est à la fois simple et très importante : si les risques sont indépendants, homogènes et de variance finie, alors la loi de la charge totale est approximativement gaussienne. On peut alors en déduire toutes les mesures de risques possibles (ce qui est fait dans la formule standard de Solvabilité II).

Les applications de ces résultats en assurance

Considérons des contrats d'assurance décès afin d'illustrer des résultats. Un contrat d'assurance garantit le versement d'un capital de 20 000 euros en cas de décès de l'assuré pendant l'année. On va supposer que ce contrat est souscrit par 10 000 assurés, et que chacun a une probabilité de 1 % de décéder dans l'année. L'espérance mathématique du nombre de décès est 100, donc le nombre de décès est une variable aléatoire, centrée sur 100. Le coût moyen (espéré d'une certaine manière par l'assureur) total sera alors de 2 millions d'euros, soit 200 euros par assuré. Ces 200 euros constituent la prime pure. Le théorème central limite nous dit que le coût total pour l'assuré suit approximativement (car le nombre de 10 000 assurés peut être supposé comme « très grand ») une loi normale. On peut ainsi montrer qu'il y a 95 % de

chances pour que le nombre de personnes qui décèdent soit compris entre 80 et 120 (voir figure 1), ou 95 % de chances pour que le coût total pour l'assuré soit compris entre 1,6 million et 2,4 millions, soit 2 millions \pm 20 %.

La loi des grands nombres nous garantit que la différence relative tend vers 0 lors que la taille du portefeuille tend vers l'infini. Formellement, les bornes de la région de confiance à 95 % sont, relativement à la moyenne, $\pm 2\sqrt{1/p - 1/\sqrt{n}}$, soit $\pm 2/\sqrt{np}$ si la probabilité est faible (ici ± 20 %).

Une application simple est alors le calcul d'un montant de fonds propres nécessaire. Supposons que l'assureur souhaite avoir une probabilité de ruine de $\alpha = 0,1$ %, et qu'il tarifie en demandant aux assurés de payer la prime pure. Alors le montant de fonds propres nécessaire pour assurer ce niveau de solvabilité est μ tel que

$$\alpha = P(S_n > n\mu + u) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

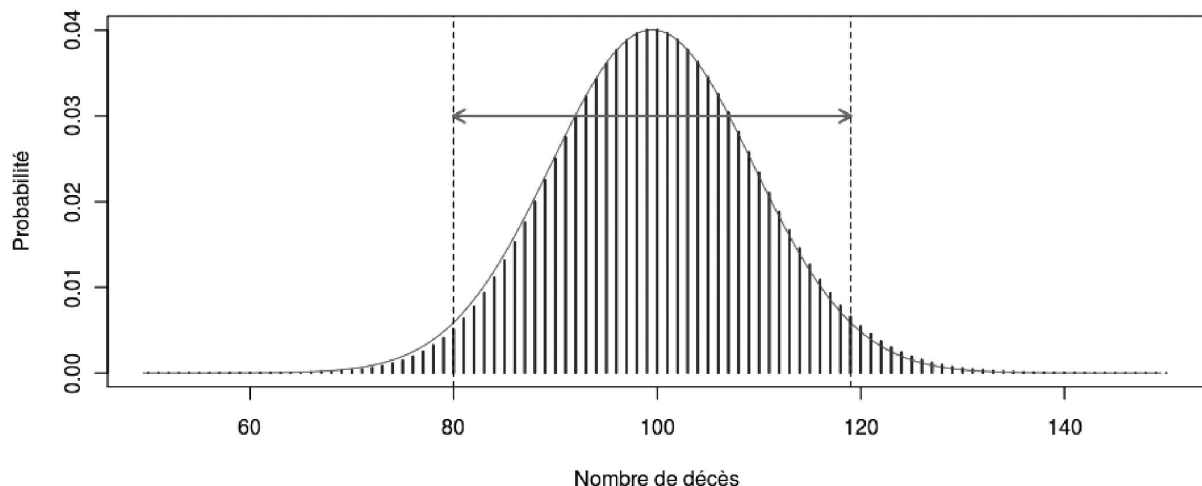
autrement dit

$$u = \sigma\sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) = 3\sigma\sqrt{n}$$

Dans le cas de l'assurance décès, $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$, et donc, les fonds propres ramenés au chiffre d'affaire s'écrivent

$$\frac{u}{np} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{np} \sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{1}{p}} = \frac{3}{\sqrt{np}} = 30\%$$

Figure 1. Distribution du nombre de personnes touchées



On notera que le chiffre d'affaires croît proportionnellement à la taille du portefeuille (avec un facteur n), mais le besoin de fonds propres croît avec un facteur en \sqrt{n} . On retrouve alors quantitativement la notion de « facteur d'échelle croissant » de l'activité d'assurance : le risque croît moins vite que le chiffre d'affaires. Mais, on s'en doute, cette lecture n'est possible que si les hypothèses des deux théorèmes peuvent s'appliquer, à savoir

- des risques indépendants entre eux ;
- des risques homogènes au sein du portefeuille ;
- des risques de moyenne et de variance finies.

■ L'hypothèse d'indépendance entre les risques

La première hypothèse que l'on avait mentionnée dans le théorème est que les risques soient indépendants. On exclut – dans le cas de l'assurance décès que l'on avait évoqué en guise d'exemple – les contagions et les épidémies. Si l'on s'intéressait à de l'assurance habitation, on exclurait les tempêtes et les inondations.

Bref, tous les risques qui précisément pourraient toucher la solvabilité des entreprises d'assurances.

Si la dépendance est faible, les deux théorèmes continuent à être valides. Plus précisément, on continue à avoir

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

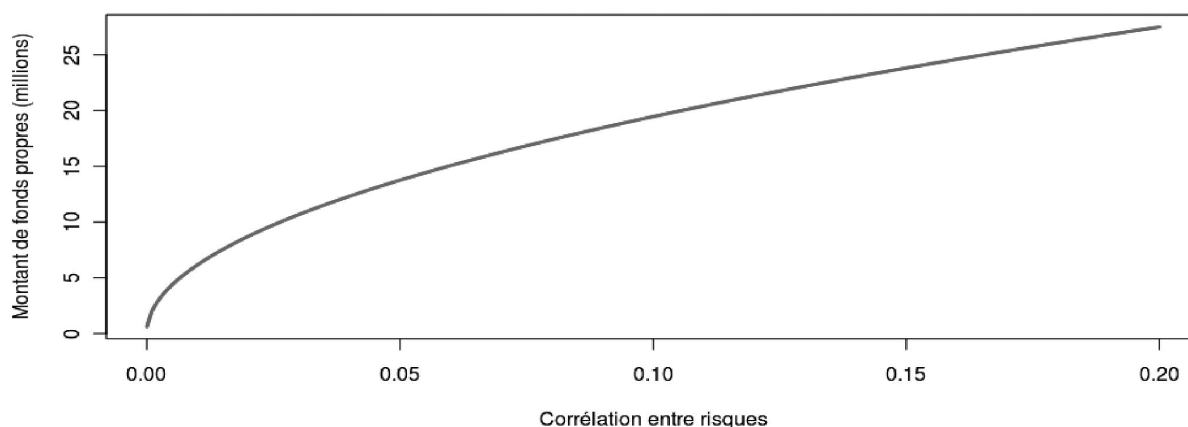
c'est-à-dire que la mutualisation est encore possible : plus le portefeuille est gros, plus le risque est faible.

Exemple 1. Considérons des risques dits « échangeables », c'est-à-dire tels que la corrélation entre X_i et X_j et soit constante, et que nous noterons r . Alors dans ce cas

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{n\sigma^2 + n(n-1)r\sigma^2}{n^2} \rightarrow r\sigma^2 \neq 0$$

autrement dit l'effet de diversification disparaît, et le risque croît proportionnellement au chiffre d'affaires. Comme le montre la figure 2, avec une corrélation « faible » (=0.01), le montant de fonds propres pour assurer la même solvabilité est multiplié par 10.

Figure 2. Impact d'une corrélation entre risques sur la solvabilité, avec 10 000 assurés



Exemple 2. Considérons des risques soumis – potentiellement – à un choc commun. Supposons qu'un événement centenaire puisse survenir (une épidémie) tel que si l'épidémie survient, la probabilité de décéder est de 10 %, et que sinon, la probabilité de décéder est de 0.909 %. La probabilité dite non conditionnelle est identique à la précédente, au sens où $0,01 \times 10 \% + 0,99 \times 0,909 \% = 1 \%$

Dans ce cas, avec 1 chance sur 1 000 le nombre de personnes touchées n'est plus 130 comme dans le cas indépendant, mais 1 039. Le montant de fonds propres nécessaire est alors 30 fois celui qu'il fallait sous hypothèse d'indépendance.

On le voit sur ces deux exemples, l'hypothèse d'indépendance est clairement une hypothèse cruciale.

■ L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille

Dans le cas d'un portefeuille hétérogène, le fait que les assurés n'aient pas la même probabilité d'être touchés n'est pas un réel problème. Ainsi, dans notre exemple de l'assurance décès, on peut supposer qu'il existe deux sous-populations (que nous supposons de taille identique), une dont la probabilité de décéder dans l'année est 0.5 %, et une autre dont la probabilité de décéder est 2 %. Sauf que si le facteur de risque permettant de distinguer entre les populations est inobservable, l'espérance (dite non conditionnelle) est la même pour tous, à savoir 1 %.

Cette notion d'hétérogénéité rejoint en fait le problème d'indépendance entre risques, car ici les risques sont conditionnellement indépendants (conditionnellement à la classe de risque). Le théorème central limite peut continuer à s'appliquer, à condition de prendre en compte le fait que l'hétérogénéité se traduit par une plus grande dispersion, et donc une plus grande volatilité. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 3. Comparons un portefeuille homogène à un portefeuille hétérogène

- Cas 1 : population homogène avec probabilité de décès de p ;
- Cas 2 : population hétérogène avec probabilité de décès légèrement plus élevée de h (soit $p + h$) pour 50 % des assurés, et moins élevée de h pour les autres (soit $p - h$).

Dans les deux cas, la loi des grands nombres s'applique et garantit que la fréquence empirique de décès va converger vers p . Ou que le nombre espéré de décès est proportionnel à n , $E(N_1) = E(N_2) = np$. Le théorème central limite assure que l'écart-type du nombre de décès croît proportionnellement à \sqrt{n} , ou plus précisément

$$\sqrt{\text{Var}(N_1)} = \sqrt{p(1-p)} \cdot \sqrt{n}$$

En revanche, dans le cas de la population hétérogène,

$$\sqrt{\text{Var}(N_2)} = \sqrt{p(1-p) + (n-1)h^2} \cdot \sqrt{n} \sim h \cdot n$$

On retrouve alors ce que nous avons vu dans le cas des risques corrélés, à savoir une croissance du risque du portefeuille avec un facteur en n et non plus en \sqrt{n} .

■ L'hypothèse sur l'espérance et la variance finie

La troisième hypothèse nécessaire est que l'espérance et la variance soient finies. En particulier, dans l'approximation que nous avons proposée, le montant de fonds propres dépend explicitement de la variance (ou de la racine carrée de la variance). Mais, dans de nombreux cas, la variance des charges individuelles de sinistres n'est pas finie. Charpentier (2010) reprenait ainsi l'analyse sur les sinistres de pertes d'exploitation, et montrait que si la moyenne pouvait être supposée finie, ce n'était pas le cas de la variance. Une des solutions est alors d'utiliser l'extension proposée par Paul Lévy ou Boris Gnedenko. En fait, si la loi normale apparaît comme limite possible pour la loi de la moyenne (en corrigeant par l'espérance et l'écart-type), c'est parce que la loi normale est stable par addition de variables indépendantes. Dans le cas des risques de variance infinie, la limite sera non plus la loi normale, mais une loi dite α -stable.

La variance comme mesure de risque ?

La dernière critique que nous pourrions émettre ne porte pas sur les hypothèses de ces théorèmes, mais se retrouve plutôt dans la lecture que nous avons faite du théorème central limite lorsque nous avons dit que le risque était croissant avec un facteur en \sqrt{n} alors que le chiffre d'affaires était croissant avec un facteur en n .

Pour reprendre la critique faite par Paul Samuelson, considérons le jeu suivant. On décide – à l'avance – d'un nombre de piles ou de faces que l'on souhaite obtenir (que l'on notera n). À chaque lancer, si la pièce tombe sur pile je touche 200 euros, et si la

pièce tombe sur face je donne 100 euros. Ce jeu n'a pas de coût d'entrée, autrement dit, ce n'est pas un jeu « juste » (au sens où nous l'avions défini dans Charpentier, 2008)). Combien de parties accepteriez-vous de jouer, demandait Paul Samuelson ?

Soit S_n le gain au bout de n parties. On notera que $P(S_n > 0)$ décroît avec n . En particulier, avec $n = 100$, la probabilité d'avoir un gain positif est la probabilité d'avoir au moins 34 piles avec 100 lancers, soit 99.9 %. J'ai donc seulement une chance sur mille de perdre de l'argent avec 100 lancers. Pourtant, Paul Samuelson affirme n'avoir trouvé personne prêt à parier sur 100 lancers. Peut-être parce qu'on peut potentiellement perdre 10 000 dollars. Et qu'en cas de perte, l'espérance de perte est de l'ordre de 6 782 dollars (on parlera de *tail VaR* à 99.9 %).

Conclusion

Si la loi des grands nombres et le théorème central limite sont fréquemment évoqués lorsque l'on parle d'assurabilité, on a vu que leurs conditions d'utilisation étaient malgré tout très contraignantes. En particulier, dès que l'on perd l'hypothèse d'indépendance, il devient dangereux d'utiliser cette règle pour déterminer les montants de fonds propres.

Car le principal danger du théorème central limite est de dire que si le chiffre d'affaires est proportionnel

à la taille du portefeuille (n), le « risque » ne croît qu'avec un facteur en \sqrt{n} . Et même si les risques sont indépendants – et que les théorèmes limites s'appliquent –, il faut encore que le « risque » soit relié à l'écart-type. Ce qui semble de plus en plus délicat à concevoir et à justifier.

Notes

1. Les théorèmes asymptotiques permettent en particulier d'obtenir des approximations des différentes lois. Pour les grands risques, la loi des excès tend asymptotiquement vers une loi de Pareto, d'où l'utilisation abondante de la loi de Pareto pour approcher les distributions associées aux grands risques par les réassureurs.

Bibliographie

ADAMS W. J., *The Life and Times of the Central Limit Theorem*, AMS, 2009.

CHARPENTIER A., « Value at risk et probabilité de ruine, entre vaccination et banque d'affaires », *Risques*, n° 76, janvier 2008, pp. 103-106.

CHARPENTIER A., « Les modèles en réassurance », *Risques*, n° 80, janvier 2009, pp. 37-41.

Fisher H., *History of the Central Limit Theorem: From Laplace to Donsker*, Springer Verlag, 2011.

Samuelson P., "Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers", *Scientia*, n° 98, 1963, pp. 108-113.