

Cet ouvrage en deux tomes entend fournir aux étudiants, chercheurs et aux techniciens de l'assurance (qu'ils soient actuaires, économistes, économètres, ingénieurs commerciaux, mathématiciens, polytechniciens, statisticiens ou autre) les méthodes permettant de gérer les grands portefeuilles d'assurance IARD. Il aborde ainsi :

- les principes de base de la gestion des risques,
- les méthodes de calcul des primes, les mesures de risque et la détermination de la marge de solvabilité ainsi que du capital économique,
- la corrélation entre risques assurés et ses conséquences,
- l'équilibre à long terme des opérations de la compagnie,
- la personnalisation des primes a priori et a posteriori (crédibilité et systèmes bonus-malus),
- l'évaluation des provisions techniques,
- la résolution de problèmes par simulation.

Les connaissances requises pour aborder cet ouvrage ont été réduites au strict minimum : il suffit de posséder de bonnes bases de mathématiques et une maîtrise des concepts élémentaires du calcul des probabilités.

*
* *

Arthur CHARPENTIER est Membre de la Commission Scientifique de l'Institut des Actuaires, diplômé de l'ENSAE et de l'université Paris Dauphine. Il est actuellement enseignant à l'ENSAE, à l'ENSEA d'Abidjan et à l'Université Paris Dauphine, et est également membre du jury de l'Institut des Actuaires.

Michel DENUIT est Membre de l'Association Royale des Actuaires Belges, docteur en sciences (orientation statistique) de l'Université libre de Bruxelles. Il est actuellement professeur à l'Institut des Sciences Actuarielles de l'Université catholique de Louvain (UCL), à l'ISFA de Lyon et à l'INSEA de Rabat.

Arthur CHARPENTIER
Michel DENUIT

MATHÉMATIQUES
DE L'ASSURANCE NON-VIE

TOME II

**Arthur CHARPENTIER
Michel DENUIT**

MATHÉMATIQUES DE L'ASSURANCE NON-VIE

**TOME II : TARIFICATION
ET PROVISIONNEMENT**



9 782717 848601

ISBN 2-7178-4860-6
45 €



Economica

Postface

In the 1960'ies the first textbooks in Mathematical Risk Theory were written. Forty years later the subject has become very wide. If a proof for this had to be given, Arthur Charpentier and Michel Denuit have done so. Their excellent opus covering all aspects of Non Life Insurance Mathematics in a modern perspective extends over 2 volumes each of them counting more than 400 pages.

The toolkit of mathematical methods applied to insurance risk has constantly grown over time. In the very early times of risk theory one finds basically the tools to solve two problems

1. Modelling the claim number and claim size of an individual risk and calculating the resulting aggregate claim size distribution.
2. Modelling the stochastic nature of the surplus of an insurance company and calculating the resulting probability of ruin.

Harald Cramér¹ had outlined this program in 1930 as the main task of the Non-Life actuary. Obviously these tasks have remained but the growth of methods and concepts since that time is impressive.

Soon it became apparent that the basic probabilities appearing in Cramér's program were fluctuating which initiated the modelling in Credibility Theory and in Kalman Filtering. A further aspect also demanded the extension of modelling: dependence between risks. This extension is actually so complex that there might be only partial solutions. In some cases correlation may suffice, in many more cases the copula will be helpful.

1. CRAMÉR HARALD. (1930) On the Mathematical Theory of risk. Skandia Jubilee Volume, Stockholm

Looking back over time it may surprise that for the most central activity of the Non Life Actuary, namely for reserving, the profession's wisdom still boils down to a few rather pragmatic methods among them the old-timer called Chain-Ladder. In my view this is certainly not due to a lack of studies in this field but rather to the enormous complexity of the statistical estimation that underlies the problem. In this situation I fully support the philosophical attitude taken by Charpentier and Denuit in this respect: Reserving is not a matter of more sophisticated modelling but rather an exercise of model selection. This is Akaike's² approach which in modern statistics becomes more and more important.

Charpentier and Denuit include in their text also the microeconomic view of the actuarial activity. The cultural barrier that often separates actuaries and also financial analysts from economists is deplorable and should be lifted as much as possible. Karl Broch in the 60ies and 70ies had really opened our actuarial eyes to see what we can learn from economic modelling. This text continues in this endeavor.

Let us hope that this text will be helpful to many generations of researchers and students to better understand what this rather mythical activity called insurance is all about. To the authors Arthur Charpentier and Michel Denuit I extend my sincere congratulations.

Hans Bühlmann, 12 janvier 2005.

2. AKAIKE HIROTOGU. (1970). Statistical Predictor Identification. *Ann. Inst. Math. Stat.* **22**. 203-217.

Table des matières

9	Tarifification a priori	7
9.1	Introduction	7
9.2	Les variables tarifaires	9
9.3	Principes de base de la statistique	11
9.3.1	Fonction de répartition empirique	11
9.3.2	L'approche paramétrique	16
9.3.3	L'information de Fisher	19
9.3.4	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance	24
9.3.5	Autres méthodes d'estimation	27
9.4	Analyse en composantes principales - ACP	29
9.4.1	Principe	29
9.4.2	Variables et individus	29
9.4.3	Ajustement du nuage des individus dans l'espace des variables	30
9.4.4	Ajustement du nuage des variables dans l'espace des observations	34
9.4.5	Analyse en composantes principales normées - ACPN	35
9.4.6	Application à la construction d'indices en tarification IARD	36
9.5	Analyse factorielle des correspondances multiples - AFCM	37
9.5.1	Analyse descriptive de grands ensembles de données qualitatives	37
9.5.2	Tableau de Burt	38
9.5.3	Analyse factorielle des correspondances binaires	39
9.6	Méthodes de scoring	42
9.6.1	Méthodes de classification	42
9.6.2	Définition d'un score	43
9.6.3	Principe du scoring	46

9.6.4	Classification optimale et choix du seuil	47
9.6.5	La pratique de la construction d'un score	48
9.6.6	Analyse discriminante	50
9.6.7	La méthode DISQUAL	52
9.6.8	Le modèle PROBIT	53
9.6.9	Le modèle LOGIT	54
9.6.10	Dualité des approches	55
9.6.11	Les courbes de performance et de sélection	56
9.6.12	Propriétés (souhaitables) d'un score	57
9.6.13	Comparaison de scores	57
9.7	Modèle linéaire et principe des moindres carrés	59
9.7.1	Définition	59
9.7.2	Formalisme matriciel	60
9.7.3	Estimation des paramètres	61
9.7.4	Matrice de prédiction	63
9.7.5	Estimation des moyennes et de la variance	64
9.7.6	Mesure de la qualité de l'ajustement: le coefficient de détermination	64
9.7.7	Résidus standardisés	65
9.7.8	Résultats inférentiels pour les paramètres	65
9.7.9	Tests d'une hypothèse simple	65
9.7.10	Comparaison de modèles emboîtés	66
9.7.11	Régions de confiance	67
9.7.12	Intervalles de confiance	67
9.7.13	Mesures d'influence	68
9.7.14	Moindres carrés pondérés	74
9.8	Modèles Additifs	76
9.8.1	Principe	76
9.8.2	Le cas d'un seul régresseur	77
9.8.3	Estimation à plus d'un régresseur: backfitting	85
9.8.4	Comparaison	87
9.9	Les modèles linéaires généralisés	88
9.9.1	Petit historique des applications actuarielles des modèles de régression	88
9.9.2	Définition	92
9.9.3	Moyenne et variance	93
9.9.4	Modèle de régression	95
9.9.5	Fonction de lien canonique	99
9.9.6	Equations de vraisemblance	100
9.9.7	Résolution des équations de vraisemblance	105
9.9.8	Information de Fisher	110
9.9.9	Intervalle de confiance pour les paramètres	111

9.9.10	Comparaison de modèles	112
9.9.11	Tests d'hypothèse sur les paramètres	118
9.9.12	Estimation du paramètre de dispersion	118
9.9.13	Analyse des résidus	119
9.9.14	La pratique des modèles linéaires généralisés	125
9.10	Traitement des variables explicatives continues: Les modèles additifs généralisés	130
9.10.1	Principe	130
9.10.2	Inférence dans les modèles généralisés additifs: deux approches possibles	131
9.10.3	En pratique...	133
9.11	Erreur de spécification dans le cas de la loi de Poisson	134
9.12	Cas pratique de tarification automobile	135
9.12.1	Description du portefeuille	135
9.12.2	Les variables décrivant la sinistralité	137
9.12.3	La mesure de l'exposition au risque: la variable DUR	141
9.12.4	Caractéristiques du preneur d'assurance	143
9.12.5	Caractéristiques du véhicule assuré	147
9.12.6	Caractéristiques de la police	152
9.12.7	Interaction entre variables tarifaires	154
9.12.8	Premier tri parmi les variables tarifaires	154
9.12.9	Analyse des fréquences de sinistre	157
9.12.10	Analyse des coûts des sinistres	170
9.13	Tarification en fréquence sur données de panel	176
9.13.1	Tarification sur base de données en panel	176
9.13.2	Notations	177
9.13.3	Présentation du jeu de données	178
9.13.4	Régression de Poisson en supposant l'indépendance temporelle	179
9.13.5	Prise en compte de la dépendance temporelle	187
9.14	Justifications techniques	193
9.14.1	Tarif technique et tarif commercial	193
9.14.2	Antisélection et segmentation	197
9.14.3	L'iniquité de la tarification a priori	200
9.15	Notes bibliographiques	201
9.16	Exercices	202
10	Théorie de la crédibilité	209
10.1	Introduction	209
10.2	Crédibilité bayésienne	211
10.2.1	Exemple introductif	211

10.2.2	Modèle bayésien de tarification <i>a posteriori</i>	213
10.2.3	Crédibilité bayésienne fréquentielle sans tarification a priori	218
10.2.4	Crédibilité bayésienne fréquentielle avec tarification a priori	225
10.3	Crédibilité linéaire	228
10.3.1	Modèle de Bühlmann	228
10.3.2	Modèle de Bühlmann-Straub	232
10.4	Crédibilité totale	236
10.5	Crédibilité multivariée	237
10.5.1	Modélisation	237
10.5.2	Prime de crédibilité linéaire	239
10.5.3	Une approche sur données désagrégées	241
10.6	Notes bibliographiques	243
10.7	Exercices	244
11	Systèmes bonus-malus	247
11.1	Introduction	247
11.1.1	Evaluation du risque a priori	247
11.1.2	Hétérogénéité résiduelle	248
11.1.3	Objectifs des systèmes bonus-malus	249
11.1.4	Soif de bonus	250
11.1.5	Systèmes à classes et systèmes "à la française"	250
11.1.6	Petit historique du système bonus-malus en France	251
11.1.7	Petit historique du système bonus-malus en Belgique	253
11.1.8	Plan du chapitre	256
11.2	Echelles en univers non-segmenté	256
11.2.1	Exemple introductif: le modèle bon/mauvais risques	256
11.2.2	Echelles et chaînes de Markov	262
11.2.3	Méthode de Norberg	269
11.2.4	Méthode de Gilde et Sundt	270
11.3	Echelles en univers segmenté	271
11.3.1	Exemple introductif	271
11.3.2	Modélisation de la sinistralité en univers segmenté	274
11.3.3	Sévérité des corrections a posteriori en fonction du degré de différenciation a priori	274
11.3.4	Méthode de Norberg en univers segmenté	275

11.3.5 Interaction entre les corrections a posteriori induites par l'échelle et la tarification a priori	277
11.4 Illustrations numériques	277
11.4.1 Tarification a priori	277
11.4.2 Echelle -1/top	277
11.4.3 Echelle -1/+2	279
11.4.4 Echelle -1/+4	281
11.5 Performances des échelles bonus-malus	282
11.5.1 Le degré moyen relatif à l'état stationnaire	282
11.5.2 La prime moyenne relative à l'état stationnaire	283
11.5.3 Le coefficient de variation des primes	283
11.5.4 Efficacité de Loimaranta	283
11.5.5 L'efficacité de Lemaire	285
11.5.6 La rétention optimale moyenne	287
11.6 En guise de conclusion...	291
11.7 Notes bibliographiques	292
11.8 Exercices	292
12 Microéconomie de l'assurance et contrats optimaux	297
12.1 Introduction	297
12.2 Décision dans l'incertain	298
12.2.1 Le modèle d'espérance d'utilité de von Neuman et Morgenstern	299
12.2.2 De la notion de subjectivité des probabilités	305
12.2.3 Les limites du modèle d'espérance d'utilité dans le risque: le paradoxe d'Allais et l'effet de certitude	306
12.2.4 Les limites du modèle d'espérance d'utilité dans l'incertain non-probabilisé: le paradoxe d'Ellsberg et la notion d'ambiguïté	307
12.2.5 Extension de la notion d'espérance: l'intégrale de Choquet	308
12.2.6 Intégrale de Choquet, distorsion et ordonnancement	310
12.2.7 Généralisation des modèles d'espérance d'utilité: les modèles dépendants du rang	311
12.3 Mesure de risque et aversion pour le risque	312
12.3.1 Aversion pour le risque et prix du risque	312
12.3.2 La notion de prudence, ou de précaution	316
12.3.3 Mesures de prudence et d'aversion	317
12.4 Offre et demande d'assurance dans le modèle d'espérance d'utilité	318

12.4.1 La demande d'assurance	318
12.4.2 Le modèle de Mossin	319
12.4.3 Le modèle général de demande d'assurance	321
12.4.4 Cas particulier de l'assurance proportionnelle	322
12.4.5 Cas particulier de l'assurance avec franchise	327
12.5 Optimalité du contrat avec franchise	328
12.5.1 Le problème	328
12.5.2 Fonctions indemnitaires admissibles	329
12.5.3 Optimalité du découvert avec franchise	329
12.5.4 Contrat avec franchise dans le modèle de Yaari	331
12.6 Asymétrie d'information et antisélection en assurance	332
12.6.1 Information incomplète	332
12.6.2 Antisélection, aléa moral et signaux	333
12.6.3 Le modèle d'équilibre de Rothschild & Stiglitz	333
12.6.4 Etude des mécanismes d'antisélection	334
12.7 Couverture des risques multiples	338
12.7.1 Risque assurable et risque non-assurable	339
12.7.2 Présence de plusieurs risques assurables	340
12.7.3 Le modèle de Yaari rejette-t-il la diversification?	342
12.8 Notes bibliographiques	345
12.9 Exercices	346
13 Approche dynamique du passif et provisionnement	347
13.1 Introduction	347
13.2 Notation et motivation	349
13.2.1 La dynamique de la vie des sinistres	349
13.2.2 Les délais avant déclaration	351
13.2.3 Les triangles de run-off	351
13.2.4 Année de survenance?	354
13.3 Les méthodes déterministes	355
13.3.1 La méthode Chain Ladder	355
13.3.2 Les link-ratios: Chain Ladder standard	355
13.3.3 Quelques variantes sur la méthode Chain-Ladder	358
13.3.4 Utilisation des provisions constituées par les gestionnaires de sinistres	360
13.3.5 Extrapolation des triangles	362
13.3.6 Les moindres carrés de de Vylder	363
13.3.7 Les méthodes de séparation	364
13.4 Utilisation de méthodes stochastiques	366
13.4.1 Le modèle de Mack	366
13.4.2 Le modèle log-linéaire de Christophides	371

13.4.3	La prise en compte des effets calendaires, l'approche de Zehnwirth	372
13.4.4	Vision générale des modèles log-linéaires . . .	372
13.4.5	Le modèle Poissonnien de Renshaw et Verrall	373
13.5	Modèles GLM et provisionnement	377
13.5.1	Modèles Tweedie et fonction de lien puissance	379
13.5.2	Quel modèle factoriel retenir?	382
13.6	L'utilisation des ratios sinistres / primes	383
13.7	Le mécanisme d'apprentissage et les méthodes bayésiennes	387
13.7.1	Modèles bayésiens et Chain Ladder	387
13.7.2	Approche bayésienne des modèles à facteurs .	388
13.7.3	Tester l'adéquation des provisions, le modèle de Bornhutter-Ferguson	388
13.7.4	Les boni-mali, ou la mise à jour des estimations	394
13.8	Analyse des résidus et des erreurs	395
13.8.1	Vérification des hypothèses du modèle de Mack	395
13.8.2	Que faire des résidus?	399
13.8.3	Utilisation du bootstrap	399
13.8.4	L'erreur de prédiction des provisions	403
13.9	... et en pratique?	404
13.10	Notes bibliographiques	406
14	Théorie des extrêmes et couverture des catastrophes	407
14.1	Introduction	407
14.2	La notion de catastrophe	408
14.2.1	Pourquoi gérer les événements extrêmes <i>ex ante</i> ?	408
14.2.2	Quel type de catastrophes?	408
14.2.3	Présentation des données	412
14.3	Loi limite des sommes et maxima	412
14.3.1	Somme de n variables	415
14.3.2	De la somme au maximum	416
14.3.3	Résultats limites: quelques mots des grandes déviations	419
14.3.4	Estimation de la loi du maximum	422
14.3.5	La $n - k$ ème plus grande valeur	425
14.3.6	Méthodes graphiques et ajustement de lois GEV	431
14.3.7	Fréquence aléatoire des sinistres	431
14.4	Fonction de queue	432
14.4.1	La notion de variation régulière	432
14.4.2	Variation régulière et max-domaine d'attraction	437
14.4.3	Somme, maximum et loi sous-exponentielle .	438
14.5	Etude de la loi des excès	439

14.5.1	Loi de Pareto généralisée	439
14.5.2	Exemples de comportement limites dans les queues	445
14.5.3	Analogie entre les approches par maximum et par excès	447
14.6	Estimation de quantiles extrêmes	450
14.6.1	Estimation de l'indice de queue	450
14.6.2	Estimation de quantiles extrêmes	455
14.6.3	Le risque de cumul, extrêmes et lois composées	465
14.7	Théorie des extrêmes multivariés	466
14.7.1	Maximas par composantes	466
14.7.2	Mesure de dépendance de queue	471
14.7.3	Application en réassurance, distinction coût et frais	476
14.8	Extrêmes pour des observations non i.i.d.	483
14.9	Couverture des risques extrêmes	485
14.9.1	Réassurance proportionnelle	486
14.9.2	Réassurance non-proportionnelle	488
14.9.3	Quelques compléments sur les clauses des traités	493
14.9.4	Tarification de traités non-proportionnels en excédent	494
14.9.5	Tarification de traités ECOMOR et LC	502
14.9.6	Couverture indicielle et titrisation	504
14.9.7	Equilibre à long terme en présence de grands risques	505
14.10	Notes bibliographiques	507
14.11	Exercices	507
15	Méthodes de simulation	511
15.1	Introduction	511
15.2	Principes généraux	515
15.2.1	Nombres pseudo-aléatoires	515
15.2.2	La méthode d'inversion	517
15.2.3	Méthode de rejet	518
15.2.4	Utilisation des lois mélange	522
15.2.5	Bootstrap	522
15.3	Simulation de lois usuelles univariées	530
15.3.1	La loi uniforme <i>Uni</i> (0,1)	530
15.3.2	Loi normale <i>Nor</i> (μ, σ^2)	530
15.3.3	Loi log-normale <i>LNor</i> (μ, σ^2)	533
15.3.4	Loi Gamma <i>Gam</i> (a, b)	533
15.3.5	Loi Béta <i>Bet</i> (a, b)	535

15.3.6	Loi de Poisson $\mathcal{Poi}(\lambda)$	536
15.3.7	Loi Géométrique $\mathcal{Geo}(p)$	538
15.3.8	Loi Binomiale $\mathcal{Bin}(n,p)$	539
15.3.9	Loi Binomiale Négative $\mathcal{NBin}(n,p)$	540
15.4	Simulation de lois multivariées	541
15.4.1	En général	541
15.4.2	Lois elliptiques	542
15.4.3	Utilisation des copules	543
15.5	Simulation de processus	547
15.5.1	Simulation de chaînes de Markov	547
15.5.2	Simulation d'un processus de Poisson	548
15.5.3	Simulation de processus en temps continu	550
15.6	Monte Carlo par Chaînes de Markov	554
15.6.1	Principe	554
15.6.2	Quelques notions de théorie ergodique	555
15.6.3	Simulation d'une mesure invariante: algorithme d'Hastings-Metropolis	557
15.6.4	Amélioration de la méthode de rejet: algorithme de Gibbs	558
15.7	Réduction(s) de variance	560
15.7.1	Utilisation de variables antithétiques	560
15.7.2	Utilisation de variables de contrôle	563
15.7.3	Utilisation du conditionnement	564
15.7.4	Echantillon stratifié	565
15.7.5	Importance sampling	566
15.8	Méthodes de quasi-Monte Carlo	568
15.9	Contrôle de la convergence et arrêt	571
15.9.1	Estimation en deux temps	573
15.9.2	Approche séquentielle	573
15.10	Application des méthodes de simulations	574
15.10.1	Algorithme de Gibbs et détection de rupture	574
15.10.2	Probabilité de ruine et simulation d'événements rares	577
15.11	Méthodes numériques ou simulations?	579
15.11.1	VaR pour des sommes de risques (non-indépendants)	580
15.12	Notes bibliographiques	583
15.13	Exercices	585
16	Les limites des modèles actuariels et de leur utilisation	587
16.1	Introduction	587
16.2	Tous les risques sont-ils assurables?	588

16.2.1	Transférer le risque à un assureur, la notion d'assurabilité	589
16.2.2	L'inassurabilité juridique	590
16.2.3	L'inassurabilité actuarielle	595
16.2.4	L'inassurabilité économique et le prix d'équilibre	604
16.3	Doit-on chercher à assurer l'inassurable?	607
16.3.1	L'assurance crée le risque	607
16.3.2	Principe de précaution et valeur temps	608
16.3.3	Assurance contre prévention	611
16.4	Est-il possible d'assurer l'inassurable? quid de l'acceptabilité	612
16.4.1	Accepter et prévenir les risques	613
16.4.2	Prévoir influence le risque	613
16.4.3	La couverture des catastrophes naturelles	614
16.4.4	Le cas de l'assurance santé	616
16.4.5	Deux acteurs qui interagissent: l'Etat et les assureurs	617
16.4.6	Nouveaux risques et seuils d'acceptabilité	618
16.4.7	Autoassurance, assurance, marchés financiers et états	619
16.4.8	L'Etat risk-manager?	621
16.5	Références bibliographiques	626