

1] Le diamètre est mesuré avec une erreur qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . On dispose de  $n$  mesures indépendantes  $\{d_1, \dots, d_n\}$ . Proposer un estimateur sans biais de la surface du cercle.

2] Calculer la borne de Cramér-Rao pour un estimateur sans biais de  $\theta$ , quand on dispose de  $n$  observations i.i.d. de loi  $f_\theta(x) = c^\theta \theta x^{-(1+\theta)} \mathbf{1}(x > c)$  où  $c$  est une constante (positive) donnée, et  $\theta > 1$ .

3] On considère un échantillon i.i.d. de taille  $n$ , tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1 + \theta x}{2} \text{ pour } x \in [-1, +1] \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Calculer l'estimateur de la méthode des moments de  $\theta$ . Donner son biais et sa variance.

4] On considère un échantillon i.i.d. de taille  $n$ , tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2} \exp(-|\theta - x|)$$

Calculer l'estimateur de la méthode des moments de  $\theta$ . Donner son biais et sa variance. Déterminer ensuite l'estimateur du maximum de vraisemblance.

5] On considère un échantillon i.i.d. de taille  $n$ , tiré suivant une loi lognormale,  $LN(\mu, \sigma^2)$ . Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu$ . Calculer  $\mathbb{E}[\hat{\mu}]$ .

6] On considère un échantillon i.i.d. de taille  $n$ , tiré suivant une loi de densité

$$f_\theta(x) = \theta(1 + \theta)x^{\theta-1}(1 - x) \text{ pour } x \in [0, 1].$$

Calculer l'estimateur de la méthode des moments de  $\theta$ . Montrer que cet estimateur n'est pas efficace.

On admette que

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx \frac{\theta(\theta + 2)^2}{2n(\theta + 3)}.$$

7] Considérons un échantillon  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  sur  $[0, 1]^2$  avec

$$\mathbb{P}[X > x, Y > y] = (1 - x) \cdot (1 - y) \cdot (1 - \max\{x, y\})^\theta$$

Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

**indice** : on pourra poser  $z_i = \max\{x_i, y_i\}$

- 8 On considère un échantillon i.i.d. de taille  $n$ , tiré suivant une loi de fonction de répartition

$$F_\theta(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\theta} \text{ pour } x > 0.$$

Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ , et l'information de Fisher.

- 9 Considérons un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant une loi Beta  $\mathcal{B}(\theta, \theta)$ .

1. Trouver une statistique exhaustive pour  $\theta$  pour un échantillon tiré suivant une loi Beta  $\mathcal{B}(\theta, \theta)$ .
2. Trouver un test de niveau  $\alpha$  de  $H_0 : \theta = 1$  contre  $H_1 : \theta = 2$ .

- 10 On dispose de  $n$  observations suivant une loi exponentielle  $\mathcal{E}(\theta)$ . On souhaite tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Écrire la vraisemblance et donnez la région de rejet du test de Neyman-Pearson de niveau  $\alpha = 5\%$ . Quelle est la puissance de ce test.

- 11 Considérons un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant une loi Beta  $\mathcal{B}(\theta, \theta)$ .

1. Trouver une statistique exhaustive pour  $\theta$  pour un échantillon tiré suivant une loi Beta  $\mathcal{B}(\theta, \theta)$ .
2. Trouver un test de niveau  $\alpha$  de  $H_0 : \theta = 1$  contre  $H_1 : \theta = 2$ .

- 12 On dispose de  $n$  observations suivant une loi exponentielle  $\mathcal{E}(\theta)$ . On souhaite tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Écrire la vraisemblance et donnez la région de rejet du test de Neyman-Pearson de niveau  $\alpha = 5\%$ . Quelle est la puissance de ce test.

- 13 Une année, on observe la naissance de 528 enfants prématurés, dont 289 garçons. Proposer une procédure de test de  $H_0$  *les garçons ont plus de chances d'être prématurés que les filles*.

- 14 Sur la rocade de Rennes, on a observé en moyenne 7 accidents mortels par an, pendant  $n$  années. Cette année, 5 accidents sont survenus. On suppose que le nombre annuel d'accident mortel suit une loi de Poisson. Serait-il possible de conclure au seuil de significativité de 5% que le nombre d'accidents a diminué.

- 15 On dispose d'un échantillon de 1200 personnes, un tiers de gauchers, et deux tiers de droitiers. Parmi les gauchers, il y a 190 fumeurs, et 300 parmi les gauchers. La proportion des fumeurs est-elle la même parmi les gauchers et les droitiers ?

- 16 On dispose d'un échantillon  $\{x_1, x_2\}$  de densité

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \text{ pour } x \in (0, 1).$$

Montrer que la région de rejet du test e plus puissant de  $H_0 : \theta = 1$  contre  $H_1 : \theta = 2$  est de la forme

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 x_2 \geq k\}.$$

Montrer que la densité de  $Y = X_1 \cdot X_2$  est

$$g(y) = \theta^2 y^{\theta-1} \log[1/y] \text{ pour } y \in (0, 1).$$

17 En 1999, une étude sur la durée de vie des ampoules dans un amphi de cours a été lancée. Le 1er janvier 2000, toutes les ampoules ont été changées, et on a observé  $n = 10$  durées de vie de ces  $n$  nouvelles ampoules, notées  $X_1, \dots, X_n$ . On suppose que les variables  $X_i$  sont indépendantes, et de loi exponentielle, de moyenne  $\theta$  (la durée est exprimée en mois).

1. Selon le constructeur, la durée de vie moyenne d'une ampoule est de 60 mois. Combien de temps en moyenne faut-il attendre avant que la première ampoule ne meure? Combien de temps en moyenne faut-il attendre avant que la dernière ampoule ne meurt?
2. On retente l'expérience avec cette fois  $n = 225$  ampoules. Écrivez la vraisemblance du modèle,  $\mathcal{L}(\theta, \mathbf{X})$ .
3. Que vaut l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .
4. Que vaut la variance asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .
5. A la fin de cette seconde expérience, on ne sait plus quel vendeur d'ampoule avait été sollicité. L'un prétendait vendre des ampoules d'une durée de vie moyenne de  $\theta_0 = 60$  mois, et le second  $\theta_1 = 66$  mois. On souhaite alors faire un test

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1$$

On souhaite construire un test en utilisant la méthode du rapport de vraisemblance. Proposez une statistique de test, et la forme de la région de rejet.

6. Comme  $n$  est suffisamment grand, on admettra que le théorème central limite peut s'appliquer, et que  $\bar{X}_n$  suit une loi normale. Donnez la loi normale approchée de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .
7. Donner la forme de la région de rejet pour une erreur de première espèce de niveau  $\alpha = 5\%$ . Pour rappel,  $\Phi^{-1}(5\%) = -1.64$ .
8. Calculez la puissance de ce test (donnez juste son expression en utilisant  $k$ ).
9. Sur l'échantillon, on observe  $\bar{X}_n = 62$ . On souhaite tester

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta > \theta_0 \text{ avec } \theta_0 = 60.$$

Expliquez graphiquement la construction du test de rapport de vraisemblance. Donnez la forme de la région de rejet.

10. Dans une approche bayésienne, on suppose qu'a priori  $\Theta$  suit une loi Gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Montrez que la loi a posteriori de  $\Theta$  est encore une loi Gamma. Donnez les paramètres de cette loi (On pourra pour cette question reparamétriser le problème en utilisant  $\lambda = 1/\theta$ ).

18 Considérons le tableau de contingence suivant

	Homme	Femme
daltonien	38	6
non-daltonien	442	514

Peut-on affirmer que le fait d'être daltonien est indépendant du genre?