

FIBONACCI, LES LAPINS, LE NOMBRE D'OR ET LES CALCULS ACTUARIELS

Arthur Charpentier

Professeur d'économie, Université de Rennes 1

Léonard de Pise, souvent plus connu sous le nom de Fibonacci, a laissé sa trace dans les livres de mathématiques pour avoir étudié, ou plutôt modélisé, la reproduction des lapins. De la dynamique du nombre de lapins est né le nombre d'or, le fameux ratio magique que l'on retrouve dans la peinture et l'architecture classiques. Mais sa contribution la plus importante est probablement le Liber abaci, daté de 1202, dans lequel Fibonacci a introduit explicitement le principe d'actualisation financière en Europe. Fibonacci a grandi dans la colonie pisane de Bougie, en Algérie, où son père était officier des douanes. Et c'est probablement grâce à la culture arabe que les premiers calculs actuariels ont été formalisés.

La dynamique de reproduction des lapins et le nombre d'or

Fibonacci est connu par les étudiants du monde entier pour avoir posé le problème suivant : « Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois ? »

Formellement, on cherche à décrire le comportement de la suite définie par la relation $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ (avec deux valeurs initiales). Comme cette suite est linéairement récurrente d'ordre deux, on peut écrire son équation caractéristique. On obtient une équation

du second degré, $x^2 - x - 1 = 0$, dont une des racines est connue sous le nom de « nombre d'or »,

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

qui vaut environ 1,618. On peut alors montrer que l'on obtient la formule dite de Binet,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n \right)$$

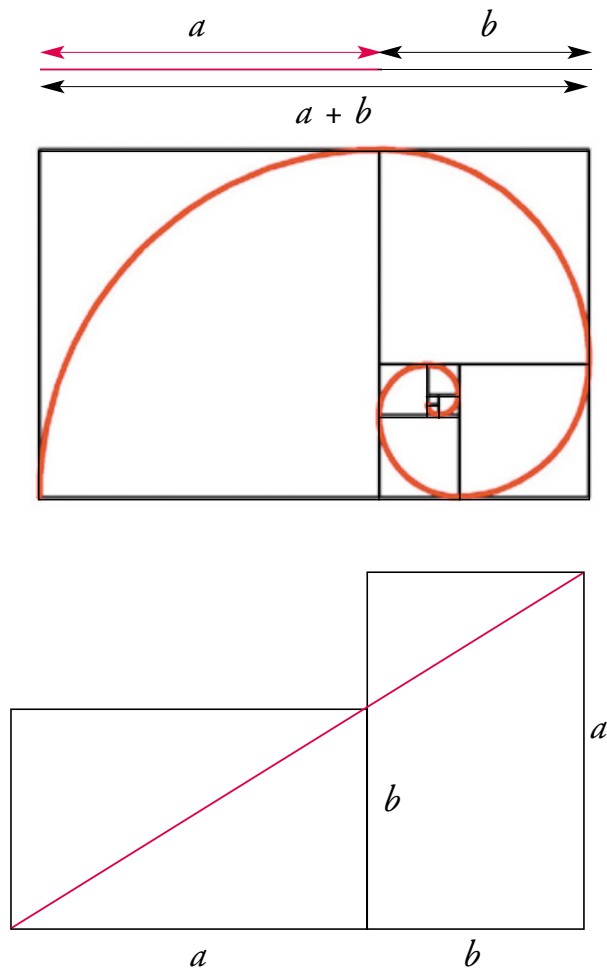
Comme l'avait déjà remarqué Johannes Kepler, vers 1611, le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire U_n / U_{n-1} , converge vers le nombre d'or, φ . Ce nombre est appelé en anglais « *golden ratio* », car il s'agit aussi d'une proportion, d'un ratio défini comme l'unique rapport a/b entre

deux longueurs a et b égal au rapport entre la somme $a + b$ et la plus grande des deux longueurs (a sur la figure 1), autrement dit :

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

Alors, forcément, la plus grande longueur est 61,8 % plus grande que la petite. Euclide évoquait ce ratio très particulier dans ses *Éléments*. Comme le montre la figure 1, ce ratio est utilisé pour construire une spirale. Luca Pacioli, un moine franciscain italien du Moyen Âge, l'appelle la « divine proportion ». En effet, comme l'avait énoncé saint Thomas d'Aquin, « les choses qui sont dotées de proportions correctes réjouissent les sens », ce qui semble conférer un caractère quasi divin à ce nombre.

Figure 1 - Interprétations géométriques du nombre d'or



Source : auteur.

Comme le montre la figure 1, à gauche, à partir de rectangles dont le rapport des longueurs des deux côtés est égal au nombre d'or, on peut construire itérativement une succession de carrés emboîtés sous forme de spirale. On retrouve ce découpage dans la composition d'un grand nombre de tableaux de la Renaissance, mais aussi dans plusieurs ouvrages architecturaux. Et si l'on colle deux rectangles dont le ratio des longueurs des côtés est égal au nombre d'or, un verticalement et un horizontalement, le prolongement de la diagonale du rectangle horizontal passera par le sommet du rectangle vertical. Cette figure se retrouve dans de nombreux croquis de Le Corbusier.

■ La notion de récursivité

Au-delà du fait que c'est à Fibonacci que l'on doit le fameux nombre d'or, cette suite réursive est surtout très populaire en informatique pour introduire la notion de récursivité. En effet, un algorithme pour calculer les termes de cette suite est :

```
F = fonction(n)
  { if(n>1) Fn = F(n-1) + F(n-2)
    if(n<=1) Fn = n
    return(Fn) }
```

Cet algorithme est simple, mais le temps d'exécution est long, très long. Si certains notent qu'il croit exponentiellement, on peut montrer assez simplement que le temps d'exécution est donné par une relation du type de celle de Fibonacci.

■ La comptabilité, en chiffres romains

Mais souvenons-nous que Fibonacci est né à la fin du XII^e siècle. Si la géométrie n'a pas beaucoup changé, l'arithmétique, elle, a beaucoup changé. Pour rappel, on comptait alors encore bien souvent à l'aide de la numérotation romaine. Cette dernière est basée sur sept symboles : I (pour 1), V (pour 5), X (10), L (50), C (100), D (pour 500) et enfin M (1 000). À partir de ces symboles, certains nombres se construisent par addition (11 va s'écrire XI), et d'autres par

soustraction (4 va s'écrire IV) : un symbole plus petit placé avant correspond à une soustraction, et un symbole plus petit placé après, à une addition. On s'attend ainsi à ce que tous les symboles soient placés par ordre décroissant (et, si c'est le cas, on les ajoute), mais, s'il y en a un qui est placé avant, on va le soustraire. Aussi, DCXIV contient les symboles D (500), C (100), X (10), I (1) et V (5). Comme 1 est avant 5, c'est qu'il faut lire -1 , et non $+1$. Et donc DCXIV vaut $500 + 100 + 10 - 1 + 5$, soit 614. De même XLV correspond à $-10 + 50 + 5$, soit 45. Il existait aussi une forme d'écriture multiplicative. Par exemple 300 pouvait s'écrire CCC ou III^C, et 80 IV^{XX} (d'où une explication possible de la forme française de « quatre-vingts »).

Ces symboles ont pour origine les entailles pratiquées par les Étrusques sur des bouts de bois ou des os. Mais, chez les Étrusques, seule l'addition de symboles était autorisée. Par la suite, les Égyptiens ont adopté un système décimal et introduit l'addition (uniquement), ce qui a permis aux scribes de faire des observations statistiques et des prévisions. Lorsqu'ils adoptèrent la langue et les pratiques grecques, vers 300 av. J.-C., les Égyptiens ont commencé à tenir de véritables documents comptables, avec des stocks de données agricoles et des flux monétaires. À la même époque, en Grèce, les lettres de change existaient, et le prêt à intérêt était fréquent. À Athènes, la cour des logistes avait le rôle d'expert-comptable. Les Romains ont poursuivi et amélioré cette tradition, avec des livres de recettes et de dépenses. L'arithmétique était complexe, comme en témoigne Schärlich [2014], et, pourtant, ce système d'encoches a été utilisé probablement jusqu'au XVII^e siècle en Europe.

■ Le livre des calculs, *Liber abaci*, et la règle de trois

Fibonacci est l'auteur d'un *liber abaci*, qui correspond à un « livre des calculs » (*abaci* donnera par la suite le terme « abaque »). En fait, alors que la norme à l'époque était d'utiliser l'arithmétique romaine, l'auteur s'est énormément inspiré des

mathématiques arabes. Les nombres arabes présentaient l'avantage d'utiliser le système décimal, ce qui a fait gagner énormément de temps de calcul (on peut aussi remonter à l'arithmétique indienne, basée sur le même système). Il y avait ainsi neuf symboles correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (et le 0 a été introduit au V^e siècle). Afin d'illustrer la simplicité des calculs, Fibonacci évoque de manière récurrente l'utilisation de la « règle de trois », même s'il ne la nomme pas ainsi – il faudra attendre *Le Gendre* [1684] pour voir apparaître cette dénomination. Cette règle, relative à la théorie des proportions, se retrouve aussi beaucoup chez Euclide (au III^e siècle av. J.-C.) : « Si quatre nombres sont en proportion, le produit des extrêmes [le plus grand et le plus petit] est égal au produit des moyens. » En fait, la règle de trois permet de trouver ce qui s'appelle parfois la « quatrième proportionnelle », qui est le quatrième nombre à mettre dans un tableau de proportionnalité dont trois cases sur quatre sont déjà remplies. Certains ont appelé la règle de trois la « règle d'or ».

En actuariat, le calcul des provisions pour sinistres à payer par conservation des cadences de paiement repose historiquement sur cette règle. Le tableau 1 illustre ainsi l'utilisation de la règle de trois pour estimer les paiements futurs : fin 2014, 57 M€ avaient été payés au titre des sinistres de 2014, et fin 2015, 83 M€ ; si, fin 2015, 63 M€ avaient été payés au titre des sinistres de 2015, on peut estimer qu'un peu plus de 90 M€ seront payés fin 2016. Ce montant est obtenu, dans la méthode dite Chain Ladder (décrite dans Charpentier, Devineau & Nessy [2010]), par la règle de trois.

Tableau 1 - Illustration de la règle de trois

	Paiements année 1	Paiements année 2
2014	57	83
2015	63	$x = \frac{63 \times 82}{57}$

Source : auteur.

On retrouve de nombreuses utilisations de cette règle dans les calculs comptables (on pourra consulter

Taulane [1689]), mais c'est surtout à Fibonacci que l'on doit la formalisation de la règle dans un contexte financier.

■ Les bases de l'actualisation

Mais on doit surtout à Fibonacci d'avoir formalisé le calcul actuariel. Rappelons que la valeur actuelle d'un ensemble de flux $\{F_1, \dots, F_n\}$, versé dans le futur, à différentes dates s'écrit :

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t}$$

où i est le taux d'actualisation. C'est à cette formule que va aboutir Fibonacci, dans le *Liber abaci*, lorsqu'il va tenter de résoudre le problème suivant :

« Un homme se rend à Lucques pour affaires, où il double son argent. Il dépense là-bas 12 dinars. Ensuite, il va à Florence, où il peut là encore doubler son argent, et il dépense encore 12 dinars. Puis, il va à Pise, double encore son investissement et dépense à nouveau 12 dinars. Quelle somme avait-il au début ? »

Ce calcul de la somme initiale correspond fondamentalement au calcul d'une valeur actuelle. Pour reprendre les notations de Fibonacci, pour investir 1 à Pise (la troisième ville), il faut disposer de $1/2 \ 1/2 \ 1/2$, qu'il interprète comme un facteur d'escompte. Pour investir 1 à Florence (la seconde ville), il fallait disposer de $1/2 \ 1/2$ au début, etc. Pour connaître la somme initiale, on notera que le facteur d'actualisation est $1/2 + 1/2 \ 1/2 + 1/2 \ 1/2 \ 1/2$, soit $7/8$. Le capital initial est alors $7/8 \times 12$, soit $10 \ 1/2$. Avec des notations plus contemporaines, avec $i = 100 \%$, on veut calculer :

$$\frac{12}{(1+i)} + \frac{12}{(1+i)^2} + \frac{12}{(1+i)^3}$$

On retrouve ici la définition classique de la valeur présente d'un ensemble de flux financiers. Mais, plus sophistiqué, Fibonacci propose ensuite le problème suivant :

« Un soldat se voit offrir une annuité par un roi de 300 besants d'or par an, payée à une cadence trimestrielle, à hauteur de 75 besants par trimestre. Soudain, le roi change pour 300 besants, payés en fin d'année. Le soldat est capable de gagner 2 besants pour 100 besants placés par mois (à la fin de chaque trimestre) à partir de son investissement. »

On retrouve ici un problème qui pourrait être posé à un examen sur les calculs actuariels.

Conclusion

Depuis Goetzmann [2005] et la redécouverte des travaux de Fibonacci, beaucoup considèrent que ce dernier a introduit le calcul actuariel en Europe ou plutôt son formalisme, avec des notations très contemporaines. Mais il convient de rappeler que l'actualisation existait depuis bien longtemps. Des traces de formalisation se retrouvent dans toutes les cultures, à commencer probablement en Chine, où *Les Neuf Chapitres sur l'art des mathématiques*, datés de 263, évoquent un problème proche de celui présenté par Fibonacci (avec là encore un voyageur qui part dépenser son argent). On retrouvera ensuite ce problème (et sa résolution) dans des textes arméniens, dans des papyrus égyptiens, mais aussi dans le *Lilavati* de Bhāskaraçārya, écrit en Inde vers 1150, juste avant la formalisation par Fibonacci. Mais la lecture de celui-ci est facilitée par l'utilisation de chiffres arabes, qui rendent les calculs plus proches de ceux que nous avons l'habitude de voir tous les jours.

Bibliographie

CHARPENTIER A. ; DEVINEAU L. ; NESSI J.M., *Mesurer le risque lors du calcul des provisions pour sinistres à payer*, Risques, n° 83, septembre 2010.

GOETZMANN W. N., "Fibonacci and the Financial Revolution", in GOETZMANN W. N. ; ROUWENHORST K. G., *The Origins of Value: The Financial Innovations that*

Created Modern Capital Markets, Oxford University Press, 2005.

LE GENDRE F., *L'arithmétique en sa perfection*, Paris, Augustin Besoigne, 1684.

LE GOFF J.-P., « Une mise en perspective historique de la quatrième proportionnelle à la fonction linéaire », *Cahiers de la Maison de la recherche en sciences humaines*, numéro spécial « L'épistémologie de la règle de trois », Presses universitaires de Caen, novembre 2000.

SCHÄRLIG A., « Les moyens de calcul du comptable antique », *Comptabilité(s)*, n° 6, 2014, <http://comptabilites.revues.org/>

SIGLER L. E., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer Verlag, 2002.

TAULANE J., *Trésor d'arithmétique des marchands et des géomètres*, Marseille, Claude Garcin, 1689.