

## QCM SÉRIES TEMPORELLES

ARTHUR CHARPENTIER

Pour rappels enfin, un processus  $ARMA(p, q)$  vérifie une relation de la forme

$$X_t = m + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc. Sauf précision contraire, on supposera que  $m = 0$ . Pour un processus stationnaire, on note  $\gamma(\cdot)$  la fonction d'autocovariance,  $\rho(\cdot)$  la fonction d'autocorrélation et  $\psi(\cdot)$  la fonction d'autocorrélation partielle.

Dans les questions 1-6, on considère un modèle autorégressif de la forme

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{0.1}$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc. On supposera que  $\phi \neq 0$ , et on supposera dans toute la section que la série  $(X_t)$  est stationnaire.

1] Laquelle des affirmations suivantes n'est pas correcte

- A.  $\varepsilon_t$  et  $X_{t-1}$  sont non-corrélés
- B.  $X_t$  et  $\varepsilon_{t-1}$  sont non-corrélés
- C.  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_{t-1}$  sont non-corrélés
- D.  $X_t$  et  $\varepsilon_t$  sont corrélés

2] Laquelle des affirmations suivant est correcte

A.  $\text{cor}(X_t, X_{t-1}) = \phi$

B.  $\text{cor}(X_t, X_{t-2}) = 0$

C.  $\text{cor}(X_t, \varepsilon_t) = 0$

D.  $\text{cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \phi$

On suppose ici que le bruit  $(\varepsilon_t)$  est de variance  $\sigma^2 = 1$ .

3] Que vaut la variance de  $(X_t)$  ?

A.  $V(X_t) = 1$

B.  $V(X_t) = (1 - \phi^2)$

C.  $V(X_t) = \frac{1}{1 - \phi^2}$

D.  $V(X_t) = 0$

On suppose que l'on travaille sur des données journalières. On a observé  $-1$  hier, et  $+1$  aujourd'hui

4] Quelle prévision feriez vous pour demain, à l'aide du modèle (0.1) ?

A.  $\hat{X} = \phi$

B.  $\hat{X} = -\phi$

C.  $\hat{X} = 0$

D.  $\hat{X} = \phi + \varepsilon$

- 5] Quel serait la variance de l'erreur de prévision à deux jours ?
- A.  $\phi$
  - B. 1
  - C.  $1 + \phi^2$
  - D.  $\phi^2$
- 6] Une seule affirmation suivant est correcte. Laquelle ?
- A. La série  $Y_t = t + X_t$  est stationnaire
  - B. La série  $Y_t = X_t - X_{t-1}$  est stationnaire
  - C. La série  $Y_t$  vérifiant la relation  $Y_t = Y_{t-1} + X_t$  est stationnaire
  - D. La série  $Y_t$  vérifiant la relation  $Y_t = \phi^{-1}Y_{t-1} + \varepsilon_t$  est stationnaire

On suppose maintenant que la série  $(X_t)$  suit une processus  $ARMA(1, 1)$

$$X_t = \phi X_{t-1} + \eta_t + \theta \eta_{t-1} \quad (0.2)$$

où  $(\eta_t)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ .

- 7] Quelle est la condition nécessaire et suffisante, sur  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\sigma$ , pour que  $(X_t)$  soit stationnaire
- A.  $|\phi| < 1$ ,  $|\theta| < 1$  et  $\sigma^2 < 1$ ,
  - B.  $|\phi| < 1$  et  $|\theta| < 1$
  - C.  $|\theta| < 1$
  - D.  $|\phi| < 1$

- 8] Parmi les affirmations suivantes, une seule est toujours vraie. Laquelle ? (un seul choix est possible)
- A. Toutes les prédictions faites avec le modèle (0.2) seront identiques avec celles faites à l'aide du modèle (0.1)
  - B. Toutes les prédictions faites avec le modèle (0.2) auront une variance (conditionnelle à l'information disponible aujourd'hui) identiques à celles du modèle (0.1)
  - C. L'autocorrélation à l'ordre 1 est toujours non-nulle  $\rho(1) \neq 0$
  - D. À partir, d'un moment, on retrouve la propriété vérifiée par les  $AR(1)$  sur les autocorrélations,  $\rho(h) = \phi\rho(h-1)$  (pour  $h$  assez grand).

- 9] Après réflexion, il semble que dans le modèle (0.2),  $\phi + \theta = 0$ . Quelle affirmation parmi les suivantes vous semble correcte
- A.  $(X_t)$  suit une marche aléatoire
  - B.  $(X_t)$  suit un bruit blanc
  - C.  $(X_t)$  est, en fait, un processus  $AR(1)$
  - D.  $(X_t)$  est, en fait, un processus  $MA(1)$

On suppose désormais que la série  $(X_t)$  suit un processus  $AR(p)$  stationnaire,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + u_t, \quad (0.3)$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc. On supposera que  $\phi_p \neq 0$ .

10 Parmi les affirmations suivantes, une seule est (de manière générale) vraie. Laquelle ?

- A. la série des autocorrélations  $\rho(h) = \text{cor}(X_t, X_{t-h})$  est nulle pour  $h > p$
- B. la série des autocorrélations partielles  $\psi(h) = \text{cor}(X_t - \text{EL}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}), X_{t-h}) - \text{EL}(X_{t-h} | X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$  est nulle pour  $h > p$
- C. l'autocorrélation d'ordre  $p$  est non nulle,  $\rho(p) \neq 0$
- D. l'autocorrélation d'ordre  $p$  vaut 1,  $\rho(p) = 1$

11 Considérons la série temporelle  $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ , où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc, avec  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.18$ , et  $Y_t = 0$  pour  $t \leq 0$ . Quelle est l'écart-type de  $Y_2$  ?

- A. 0.6
- B. 1.2
- C. 3.0
- D. 3.6
- E. 7.2

12 Considérons la série temporelle

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}}{2}$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc, avec  $\sigma_\varepsilon^2 = 8$ . Quelle est la covariance entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

13] Considérons la série temporelle

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_{t-7}}{8}$$

où  $(\varepsilon_t)$  est un bruit blanc, avec  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.64$ . Quelle est la corrélation entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  ?

- A. 0.03
- B. 0.04
- C. 0.05
- D. 0.06
- E. 0.07

14] Considérons un processus  $AR(1)$  stationnaire  $AR(1)$  avec 200 observations. On observe  $\hat{\gamma}(0) = 0.348$  et  $\text{Var}(\bar{Y}) = 0.006$ . Quelle est la valeur de  $\phi$  ?

- A. 0.50
- B. 0.55
- C. 0.60
- D. 0.65
- E. 0.70

Dans les trois questions qui suivent, on considère un processus  $MA(2)$ , avec  $\theta_1 = +0.2$ ,  $\theta_2 = -0.7$  et  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

15] Quelle est la variance de  $Y_t$  ?

- A. 1.34
- B. 1.40
- C. 1.45
- D. 1.49
- E. 1.53

16] Quelle est la corrélation entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  ?

- A.  $-0.222$
- B.  $-0.123$
- C.  $-0.039$
- D.  $+0.039$
- E.  $+0.222$

17] Quelle est la corrélation entre  $Y_t$  et  $Y_{t-2}$  ?

- A.  $-0.458$
- B.  $-0.429$
- C.  $+0.429$
- D.  $+0.441$
- E.  $+0.458$

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus  $AR(1)$ , avec  $\phi = -0.5$  et  $\sigma_\varepsilon = 8.66$ .

18] Quelle est la covariance entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  ?

- A.  $-30$
- B.  $-40$
- C.  $-50$
- D.  $-70$
- E.  $-90$

19] Quelle est la covariance entre  $Y_t$  et  $Y_{t-2}$  ?

- A.  $9$
- B.  $16$

C. 25

D. 49

E. 81

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus  $AR(1)$ , avec  $\phi > 0$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 5.333$ , et  $\gamma(2) = 3$ .

**20** Quelle est la valeur de  $\phi$ , coefficient d'autocorrélation ?

A. 0.5

B. 0.6

C. 0.7

D. 0.8

E. 0.9

**21** Quelle est la valeur de l'autocovariance  $\gamma(1)$  ?

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

E. 8

Dans les quatre questions qui suivent, on considère un processus  $ARMA(1,1)$ , avec  $\phi = -0.5$ ,  $\theta = -0.6$  et  $\sigma_\varepsilon^2 = 4$ .

**22** Quelle est la valeur de  $\gamma(0)$  ?

A. +4.053

B. +4.063

C. +4.429

D. +4.706

E. +5.099

23] Quelle est la valeur de  $\gamma(1)$  ?

A. -1.694

B. -0.438

C. +0.373

D. +1.029

E. +1.670

24] Quelle est la valeur de  $\rho(1)$  ?

A. -0.360

B. -0.108

C. +0.092

D. +0.232

E. +0.328

25] Quelle est la valeur de  $\rho(2)$  ?

A. -0.098

B. -0.093

C. -0.046

D. +0.065

E. +0.252

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus  $ARIMA(2, 1, 2)$ ,

$$Y_t = 1 + 1.8Y_{t-1} - 1.4Y_{t-2} + 0.6Y_{t-3} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t1} + 0.1\varepsilon_{t-2}$$

26] Quelle est la valeur de  $\phi_1$  ?

- A. +0.4
- B. +0.5
- C. +0.6
- D. +0.7
- E. +0.8

27] Quelle est la valeur de  $\phi_2$  ?

- A. -0.6
- B. -0.5
- C. -0.4
- D. -0.3
- E. -0.2

Dans les deux questions qui suivent, on suppose que  $Y_t = X_t + \varepsilon_t$  avec  $X_t = X_{t-1} + u_t$ , ou les bruits blancs  $(\varepsilon_t)$  et  $(u_t)$  sont indépendants, avec  $\sigma_\varepsilon^2 = 2$  et  $\sigma_u^2 = 1$ .

28] Quelle est la variance de  $\Delta Y_t$  ?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

29] Quelle est la corrélation entre de  $\Delta Y_t$  et  $\Delta Y_{t-1}$ ?

- A.  $-0.455$
- B.  $-0.444$
- C.  $-0.429$
- D.  $-0.400$
- E.  $-0.364$

Dans les trois questions qui suivent, on considère un processus  $AR(2)$ , avec  $\phi_1 = -0.5$  et  $\phi_2 = -0.3$ .

30] Quelle est la valeur de  $\rho(1)$  ?

- A.  $-0.714$
- B.  $-0.385$
- C.  $+0.135$
- D.  $+0.385$
- E.  $+0.714$

31] Quelle est la valeur de  $\rho(2)$  ?

- A.  $-0.385$
- B.  $-0.300$
- C.  $-0.108$
- D.  $+0.300$
- E.  $+0.657$

32] Quelle est la valeur de  $\psi(2)$  ?

- A.  $-0.385$
- B.  $-0.300$
- C.  $-0.108$
- D.  $+0.300$
- E.  $+0.657$

33] Considérons 100 observation d'un processus  $AR(2)$   $(Y_t)$ . On suppose que  $\hat{\gamma}(0) = 4$ ,  $\hat{\rho}(1) = 0.5$ ,  $\hat{\rho}(2) = 0.5$  et  $\bar{Y} = 1$ . Quelle est la valeur de  $\sigma_\varepsilon^2$

- A. 2.667
- B. 3.267
- C. 3.345
- D. 3.669
- E. 3.733

On considère dans les trois prochains questions un modèle  $MA$  saisonnier, avec

$$\Theta(L) = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_{12} L^{12})$$

et  $Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ . On suppose que  $\theta_1 = 0.3$ ,  $\theta_{12} = 0.6$  et  $\sigma^2 = 4$ .

34] Quelle est la valeur de  $\gamma(0)$ ?

- A. 5.93
- B. 6.26
- C. 6.42
- D. 6.96
- E. 7.50

- 35 On considère  $(Y_t)$  un processus  $AR(2)$  avec  $\phi_1 = 0.5$ ,  $\phi_2 = 0.3$  de moyenne  $\mu = 5$ .  
Si  $Y_1 = 5$ ,  $Y_2 = 7$  et  $Y_3 = 5$ , quelle serait la valeur de  $\varepsilon_3$  ?
- A.  $-1.0$
  - B.  $-0.8$
  - C.  $-0.6$
  - D.  $-0.4$
  - E.  $-0.2$