

Statistique Mathématique

Arthur Charpentier

Octobre 2015

1. Considérons un échantillon tiré suivant une loi de densité

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2}[1 + \theta x] \text{ pour } x \in [-1, +1],$$

et 0 sinon. A quelle(s) condition(s) sur θ f_{θ} est-elle une densité ? Proposez un estimateur pour θ .

2. Considérons un échantillon tiré suivant une loi de densité

$$f_{\theta}(x) = \theta(1 - x)^{\theta-1} \text{ pour } x \in [-1, +1],$$

et 0 sinon. A quelle(s) condition(s) sur θ f_{θ} est-elle une densité ? Proposez un estimateur pour θ .

3. Considérons un échantillon tiré suivant une loi de densité

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} \text{ pour } x \in [0, \theta].$$

Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de la médiane de la distribution.

4. Considérons un échantillon tiré suivant une uniforme sur $[\theta - 1, \theta + 1]$.

On note $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$ et $\hat{\theta}_2 = \frac{x_{1:n} + x_{n:n}}{2}$. Calculer le biais et la variance de ces estimateurs.

5. Considérons un échantillon tiré suivant une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Malheureusement, seules les observations positives ont été gardées. Quelle est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ?

6. Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, \theta\}$ avec $\theta \in \mathbb{N}$. Trouver un test de niveau α de $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

7. Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \varphi\mu^2)$ avec $\varphi > 0$ et μ inconnus. Trouver un test de niveau α de $H_0 : \varphi = 1$ contre $H_1 : \varphi \neq 1$.

8. Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi Beta $\mathcal{B}(\theta, \theta)$. Trouver un test de niveau α de $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta = 2$.

9. Considérons un échantillon $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tiré suivant une loi de densité $f_\theta(x) = \theta^{-1}$ sur $[0, \theta]$. On souhaite tester $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta \neq 1$. Pour cela, on utilise la procédure de test suivante:

$$\text{si } x_{4:4} = \max\{x_i\} \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x_{4:4} > 1 \text{ on rejette } H_0$$

Quelle est la puissance d'un tel test ?

10. Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi $\mathcal{N}(0, \theta)$. Montrer que $n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ est un estimateur sans biais de θ . Calculer sa variance.

11. Trouver une statistique exhaustive pour θ pour un échantillon tiré suivant une loi Beta $\mathcal{B}(\theta, \theta)$.

12. Considérons un échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$ tiré suivant une loi de densité $f_\theta(x) = [3\theta]^{-1}$ sur $[-\theta, 2\theta]$, avec $\theta > 0$. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ .