

# Statistique Paramétrique

Arthur Charpentier

Octobre 2015

1. Loi normale,  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ . Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\boldsymbol{\theta}$  à partir d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .
2. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant  $f_\theta$  avec

$$f_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta x^2}{2}\right) \text{ avec } \theta > 0.$$

Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Montrez que  $\hat{\theta}$  est une statistique exhaustive. Montrer que

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{n}{n-2}\theta$$

On admettra que  $\text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{2n^2\theta^2}{(n-2)^2(n-4)}$ . Proposer un estimateur sans biais de  $\theta$ , et montrer qu'il n'est pas efficace.

3. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant  $f_\theta$  avec

$$f_\theta(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{\pi} \cdot \theta^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \text{ avec } \theta > 0.$$

Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Cet estimateur est-il biaisé ? convergent ?

4. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant  $f_\theta$  avec

$$f_{a,\theta}(x) = ae^{-a(x-\theta)} \text{ pour } x \geq \theta.$$

Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Cet estimateur est-il biaisé ? convergent ?

5. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant une loi  $\mathcal{U}([- \theta, + \theta])$ . Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Cet estimateur est-il biaisé ? convergent ?

6. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant  $f_\theta$  avec

$$f_\theta(x) = \frac{1+\theta}{2}[1+|x|]^\theta, \text{ pour } x \in (-1, +1),$$

et  $\theta > -1$ . Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Cet estimateur est-il biaisé ? convergent ?

7. On dispose d'un échantillon  $\{x_1, \dots, x_n\}$  tiré suivant un mélange

$$X = \begin{cases} U_1 \sim \mathcal{U}([0, a]) & \text{avec probabilité } \theta \\ U_2 \sim \mathcal{U}([0, b]) & \text{avec probabilité } 1 - \theta \end{cases}$$

avec  $\theta \in (0, 1)$  et  $a < b$ . Soit  $N$  le nombre d'observations entre 0 et  $a$  dans l'échantillon. Quelle est la loi de  $N$  ? Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .