

Numéro étudiant(e) : \_\_\_\_\_

NOM, Prénom : \_\_\_\_\_

U.E. STATISTIQUE, RAPPELS, 2014-2015

Il y a 10 questions, à faire en une heure. Merci d'entourer sur la feuille *la* bonne réponse. Bonne réponse +1, mauvaise réponse ou pas de réponse, 0.

**1** Une étude sur les crimes dans le grand Rennes (ville et banlieue) révèle que :

- i) 25% des crimes ont lieu le jour ;
- ii) 80% des crimes ont lieu dans la ville ;
- iii) 10% des crimes de banlieue ont lieu le jour.

Trouver le pourcentage des crimes en ville qui ont lieu la nuit.

- A) 57%      B) 63%      C) 71%      D) 80%      E) 90%

Notons  $J$  et  $N$  pour le jour et la nuit, avec  $N = J^C$ , et  $V$  et  $B$  pour la ville et la banlieue, avec là encore  $V = B^C$ . On nous dit que

- i)  $\mathbb{P}(J) = .25$  et donc  $\mathbb{P}(N) = .75$
- ii)  $\mathbb{P}(V) = .80$  et donc  $\mathbb{P}(B) = .2$
- iii)  $\mathbb{P}(J|B) = .1$

(ce sont des probabilités conditionnelles qu'on nous donne ici). Et on nous demande  $\mathbb{P}(N|V)$ . Lançons nous. Pour iii, notons que

$$\mathbb{P}(J|B) = \frac{\mathbb{P}(J \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = .1 \text{ donc } \mathbb{P}(J \cap B) = .1 \times .2$$

Ce qu'on cherche à calculer, c'est

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{\mathbb{P}(N \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(N^C \cap V)}{\mathbb{P}(V)}$$

avec

$$\mathbb{P}(N^C \cap V) = \mathbb{P}(N^C) - \mathbb{P}(N^C \cap V^C) = \mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(J \cap B)$$

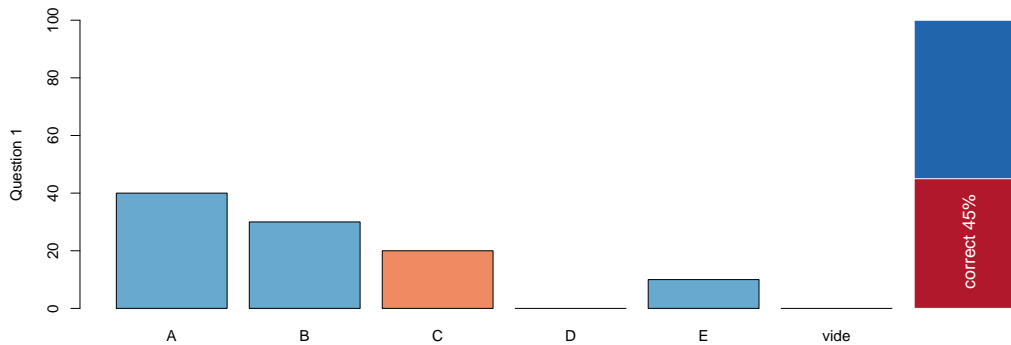
Si on résume

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{\mathbb{P}(V) - [\mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(J \cap B)]}{\mathbb{P}(V)}$$

i.e. (puisque'on connaît ici tous les termes),

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{.8 - [.25 - .02]}{.8} = .7125$$

qui est la réponse C.



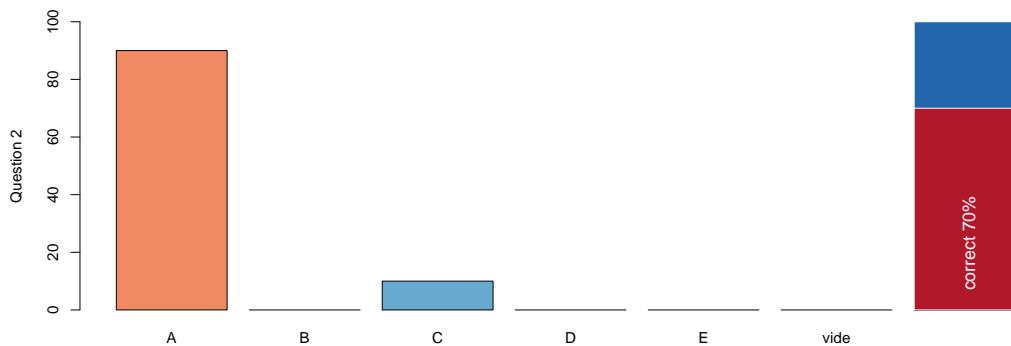
- 2 Cent pièces de monnaie sont distribuées aléatoirement dans 30 boîtes, numérotées de 1 à 30. Trouver la probabilité que la première boîte contienne exactement 3 pièces.

A) 0.223      B) 0.777      C) 0.198      D) 0.961      E) 0.5

Soit  $N$  le nombre de pièces dans la première boîte. Alors  $N$  suit une loi binomiale, de paramètre  $n = 100$  (on lance 100 pièces), avec  $p = 1/30$  (on a une chance sur 30 de tomber dans une boîtes précises). Aussi,

$$\mathbb{P}(N = 3) = \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} = \frac{100!}{\underbrace{97!3!}_{100 \times 99 \times 98 / 2 \times 3}} \frac{1}{30^3} \frac{29^{97}}{30^{97}} \sim 0.2234551$$

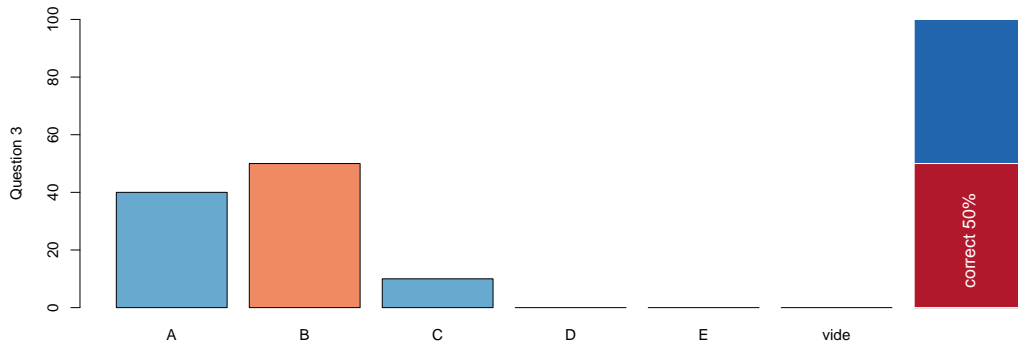
qui est la réponse A.



- 3 On lance trois dés. Trouver la probabilité que les trois dés donnent le même résultat.

A)  $\frac{1}{216}$       B)  $\frac{1}{36}$       C)  $\frac{3}{216}$       D)  $\frac{4}{9}$       E)  $\frac{1}{8}$

Disons qu'on fait trois lancers à la suite. Le premier fixe le numéro. En faisant un second lancer, il y a 1 chance sur 6 de tomber sur la même valeur, et pareil pour le troisième. Comme les lancers sont supposés indépendants - sinon on ne peut résoudre ce problème - ça fait 1 chance sur 36. Qui est la réponse B.



- 4 Soit  $X$  et  $Y$  des variables discrètes de distribution conjointe donnée par le tableau suivant :

		$X$		
		1	2	3
$Y$	1	$1/12$	$1/6$	0
	2	$1/18$	$13/36$	$1/3$

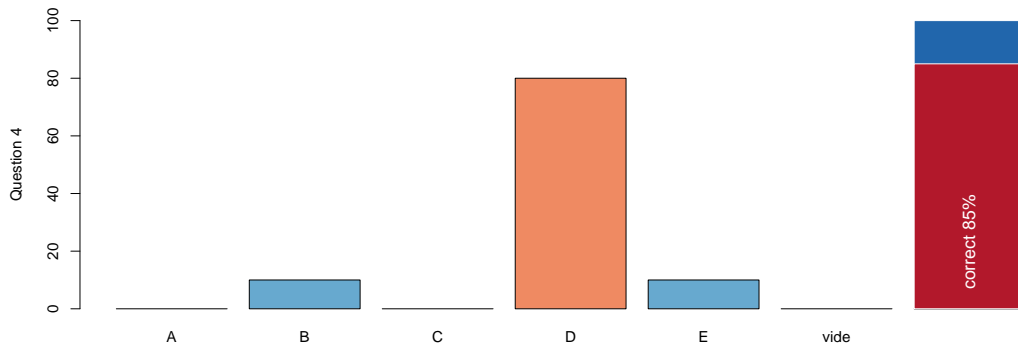
Trouver  $\mathbb{P}(X \leq 2)$

- A)  $\frac{1}{12}$     B)  $\frac{1}{2}$     C)  $\frac{5}{36}$     D)  $\frac{2}{3}$     E)  $\frac{1}{3}$

Il faut sommer les 4 probabilités à gauche, i.e.  $X \leq 2$ ,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{13}{36} = \frac{3 + 2 + 6 + 13}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

qui est la réponse D.



5 Le logarithme naturel de la variable aléatoire  $X$  est uniformément distribué sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . Sachant que  $X > 1$ , calculer la probabilité que  $X \leq 2$ .

- A) 0.347      B) 0.452      C) 0.244      D) 0.628      E) 0.549

On nous demande

$$\mathbb{P}(X \leq 2 | X > 1) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 2\} \cap \{X > 1\})}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X \in [1, 2])}{\mathbb{P}(X > 1)}$$

le logarithme étant une fonction croissante,

$$\mathbb{P}(X \leq 2 | X > 1) = \frac{\mathbb{P}(\log(X) \in [\log(1), \log(2)])}{\mathbb{P}(\log(X) > \log(1))} = \frac{\mathbb{P}(\log(X) \in [0, \log(2)])}{\mathbb{P}(\log(X) > 0)}$$

Comme  $\log(X)$  suit une loi uniforme sur  $[-2, 2]$ ,

$$\mathbb{P}(\log(X) > 0) = \frac{2 - 0}{2 - -2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

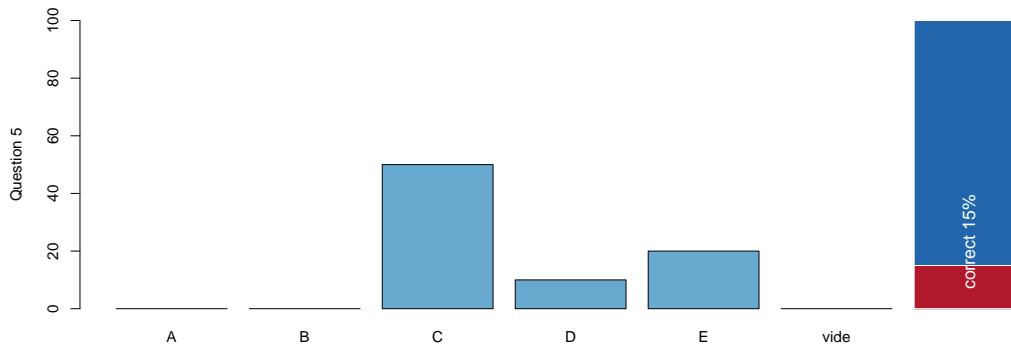
et

$$\mathbb{P}(\log(X) \in [0, \log(2)]) = \frac{\log(2) - 0}{2 - -2} = \frac{\log(2)}{4}$$

Aussi,

$$\mathbb{P}(X \leq 2 | X > 1) = \frac{\log(2)}{2} \sim 0.3465736$$

qui correspond à la réponse A.



- 6 Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de densité  $f_X(x) = ax$  pour  $0 \leq x \leq \sqrt{2/a}$ , où  $a > 0$ . Si  $Var[X] = 1$  alors que vaut  $a$  ?

A) 1/9      B) 1/3      C) 1      D) 3      E) 9

On se lance pour calculer les deux premiers moments,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2/a}} x f(x) dx = \int_0^{\sqrt{2/a}} ax^2 dx = \left[ \frac{ax^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2/a}}$$

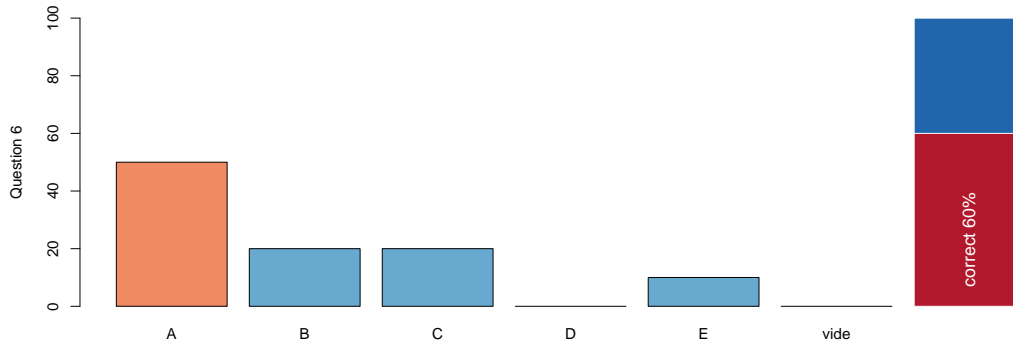
et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\sqrt{2/a}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\sqrt{2/a}} ax^3 dx = \left[ \frac{ax^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2/a}}$$

Aussi, comme  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ ,

$$\text{Var}(X) = \frac{a}{4} \sqrt{2/a}^4 - \frac{a^2}{3^2} \sqrt{2/a}^{3 \times 2} = \frac{a \times 2^2}{4 \times a^2} - \frac{a^2 \times 2^3}{3^2 \times a^3} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{8}{9}\right)$$

i.e.  $1/9a = 1$  donc  $a = 1/9$ , qui est la réponse A.



- 7 La durée de vie d'un néon  $A$  (respectivement  $B$ ) suit une loi exponentielle de moyenne 6 ans (respectivement 3 ans). Trouver la probabilité que le néon  $A$  dure moins de 3 ans et le néon  $B$  moins de 2 ans (ils sont indépendants).

A)  $\frac{1}{18} (1 - e^{-\frac{1}{2}})$       B)  $\frac{1}{18} e^{-\frac{7}{6}}$       C)  $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}} + e^{-\frac{7}{6}}$   
D)  $e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{2}{3}}$       E)  $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}}$

On nous demande  $\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\})$ , qui peut s'écrire, par indépendance des deux durées de vie

$$\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\}) = \mathbb{P}(\{A \leq 3\}) \times \mathbb{P}(\{B \leq 2\})$$

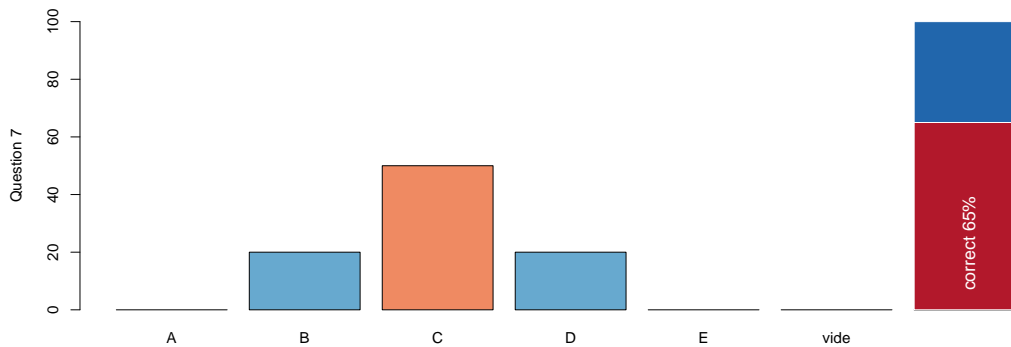
Or les fonctions de répartition des lois exponentielles sont

$$\mathbb{P}(A \leq x) = 1 - e^{-x/6} \text{ et } \mathbb{P}(B \leq x) = 1 - e^{-x/3}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\}) = (1 - e^{-3/6}) \times (1 - e^{-2/3}) = 1 - e^{-1/2} - e^{-2/3} + e^{-(2/3+1/2)}$$

qui est la réponse C.



8 Si  $X$  est uniforme sur l'intervalle  $]0, 1]$ , trouver  $\mathbb{E}[-\ln X]$ .

- A)  $-1$       B)  $0$       C)  $\frac{1}{e}$       D)  $1$       E)  $e$

Comme  $X$  est une variable à valeurs de  $]0, 1]$ ,  $\log(X)$  est négative, et donc  $-\log(X)$  est une variable positive. Or on a vu en cours une formule simple et pratique, pour des variables positive.

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(-\log X > x) dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(\log X < -x) dx$$



en prenant l'opposé, et comme l'exponentielle est une fonction croissante

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X < \exp(-x)) dx$$

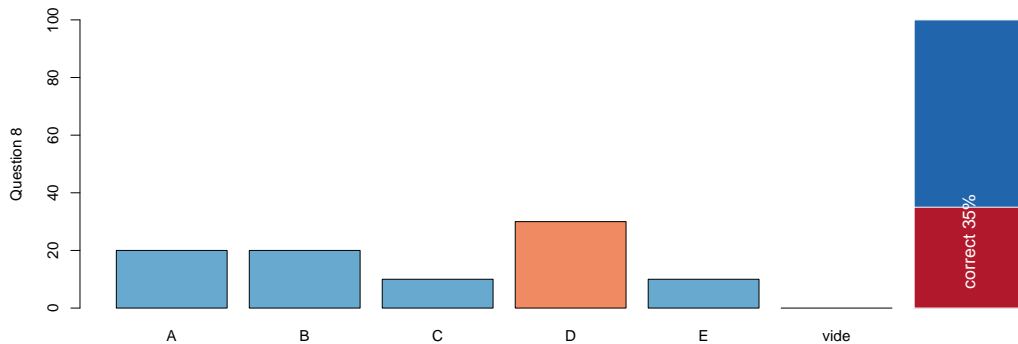
Or  $X$  est une variable uniformément distribuée sur  $[0, 1]$  donc pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t) = t.$$

Aussi,

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

qui est la réponse D. En fait,  $-\log(X)$  suit une loi exponentielle, de moyenne 1.



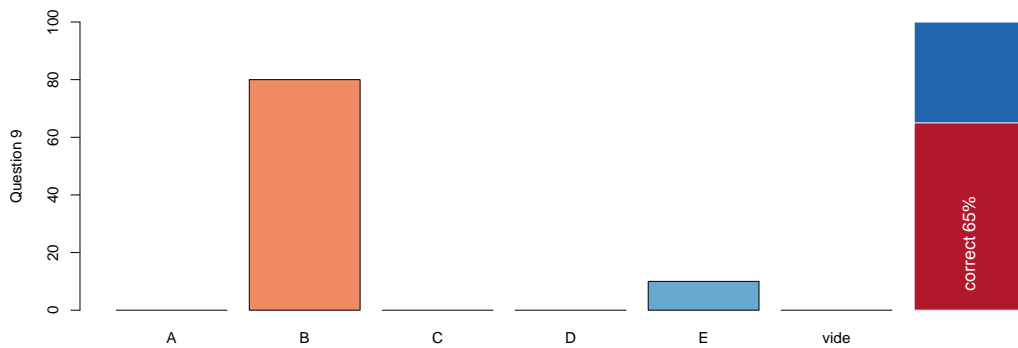
9 Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $\mathbb{E}[X] = 2$  et  $\mathbb{E}[X(X - 4)] = 5$ . Trouver l'écart-type de  $Y = -4X + 12$ .

- A)  $\sqrt{24}$     B) 12    C) 4    D) 24    E) 144

On nous dit que  $\mathbb{E}(X) = 2$  et que  $\mathbb{E}(X^2 - 4X) = 5$ , ou encore  $\mathbb{E}(X^2) = 5 + 4\mathbb{E}(X) = 5 + 4 \times 2 = 13$ . Maintenant la question est (à peu de choses près) le calcul de la variance de  $-4X + 12$ , qui est la variance de  $4X$ , ou 16 fois la variance de  $X$ . Or

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 13 - 2^2 = 9$$

L'écart-type de  $X$  est 3 et donc, l'écart-type de  $-4X + 12$  est 4 fois cette valeur, soit 12, qui est la réponse B.



10 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = \frac{|x|}{4}$  pour  $-2 \leq x \leq 2$ . Trouver  $\sigma_X$ , l'écart-type de  $X$ .

- A) 1      B)  $\sqrt{2}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       E) 2

La densité est symétrique par rapport à 0, donc la loi est centrée sur 0, i.e.  $\mathbb{E}(X) = 0$ . Aussi,  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$ . Reste à faire les calculs !

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-2}^{+2} x^2 \frac{|x|}{4} dx = 2 \int_0^2 x^2 \frac{x}{4} dx$$

par des propriétés de symétrie. Si on continue

$$\mathbb{E}(X^2) = 2 \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = 2 \left[ \frac{x^4}{4 \times 4} \right]_0^2 = 2 \times \frac{2^4}{4 \times 4} = 2$$

La variance vaut 2 et donc l'écart-type vaut  $\sqrt{2}$ . Ce qui correspond à la réponse B.

