

Numéro étudiant(e) : _____

NOM, Prénom : _____

U.E. STATISTIQUE, RAPPELS, 2014-2015

Il y a 10 questions, à faire en une heure. Merci d'entourer sur la feuille *la* bonne réponse. Bonne réponse +1, mauvaise réponse ou pas de réponse, 0.

Il y avait deux questionnaires, avec des questions similaires, seules les applications numériques pouvaient être un peu différentes. Pour chaque question, j'ai mis les statistiques de réponses pour ce questionnaire, et le taux de bonne réponse, pour la question, en incluant les réponses de l'autre questionnaire.

1 Une étude sur les crimes dans le grand Rennes (ville et banlieue) révèle que :

- i) 30% des crimes ont lieu le jour ;
- ii) 75% des crimes ont lieu dans la ville ;
- iii) 10% des crimes de banlieue ont lieu le jour.

Trouver le pourcentage des crimes en ville qui ont lieu la nuit.

- A) 57% B) 63% C) 71% D) 80% E) 90%

Notons J et N pour le jour et la nuit, avec $N = J^C$, et V et B pour la ville et la banlieue, avec là encore $V = B^C$. On nous dit que

i) $\mathbb{P}(J) = .30$ et donc $\mathbb{P}(N) = .70$

ii) $\mathbb{P}(V) = .75$ et donc $\mathbb{P}(B) = .25$

iii) $\mathbb{P}(J|B) = .10$

(ce sont des probabilités conditionnelles qu'on nous donne ici). Et on nous demande $\mathbb{P}(N|V)$. Lançons nous. Pour iii, notons que

$$\mathbb{P}(J|B) = \frac{\mathbb{P}(J \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = .10 \text{ donc } \mathbb{P}(J \cap B) = .10 \times .25$$

Ce qu'on cherche à calculer, c'est

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{\mathbb{P}(N \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(N^C \cap V)}{\mathbb{P}(V)}$$

avec

$$\mathbb{P}(N^C \cap V) = \mathbb{P}(N^C) - \mathbb{P}(N^C \cap V^C) = \mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(J \cap B)$$

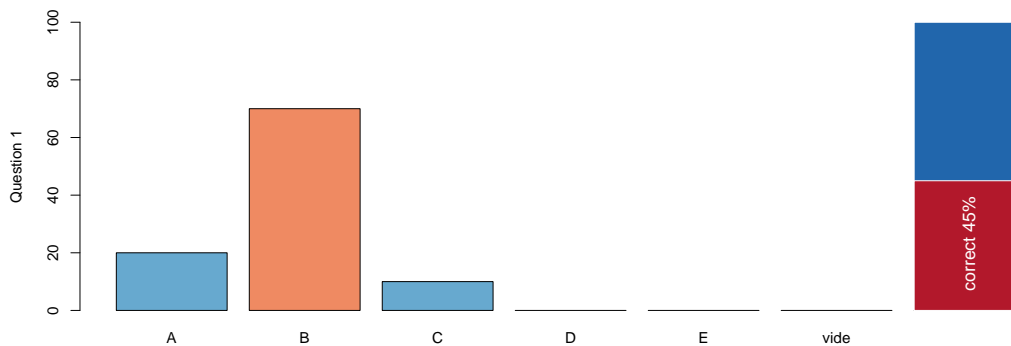
Si on résume

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{\mathbb{P}(V) - [\mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(J \cap B)]}{\mathbb{P}(V)}$$

i.e. (puisqu'on connaît ici tous les termes),

$$\mathbb{P}(N|V) = \frac{.75 - [.30 - .025]}{.75} = 0.633333$$

qui est la réponse B.



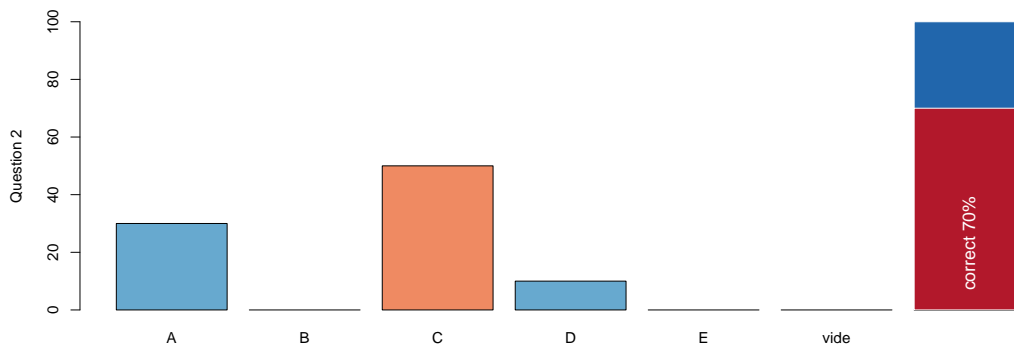
- 2 Cent pièces de monnaie sont distribuées aléatoirement dans 30 boîtes, numérotées de 1 à 30. Trouver la probabilité que la première boîte contienne exactement 2 pièces.

A) 0.223 B) 0.777 C) 0.198 D) 0.961 E) 0.5

Soit N le nombre de pièces dans la première boîte. Alors N suit une loi binomiale, de paramètre $n = 100$ (on lance 100 pièces), avec $p = 1/30$ (on a une chance sur 30 de tomber dans une boîtes précises). Aussi,

$$\mathbb{P}(N = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{100!}{\underbrace{98!2!}_{100 \times 99/2}} \frac{1}{30^2} \frac{29^{98}}{30^{98}} \sim 0.1983734$$

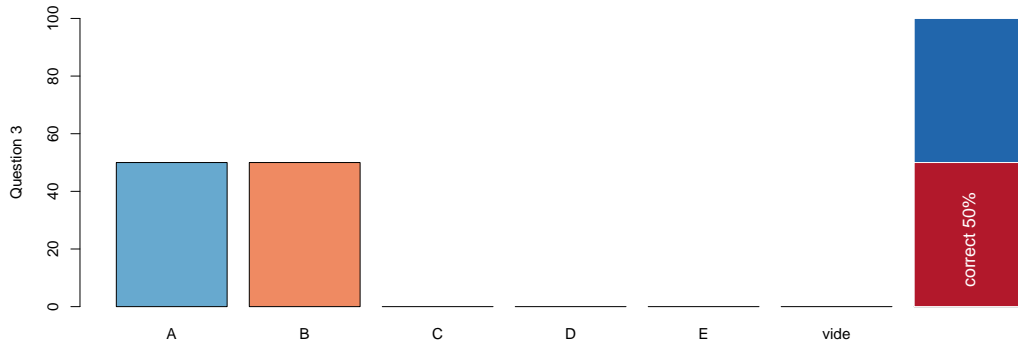
qui est la réponse C.



- 3 On lance trois dés. Trouver la probabilité que les trois dés donnent le même résultat.

A) $\frac{1}{216}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{3}{216}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{1}{8}$

Disons qu'on fait trois lancers à la suite. Le premier fixe le numéro. En faisant un second lancer, il y a 1 chance sur 6 de tomber sur la même valeur, et pareil pour le troisième. Comme les lancers sont supposés indépendants - sinon on ne peut résoudre ce problème - ça fait 1 chance sur 36. Qui est la réponse B.



- 4 Soit X et Y des variables discrètes de distribution conjointe donnée par le tableau suivant :

		X		
		1	2	3
Y	1	$1/12$	0	$1/6$
	2	$1/18$	$13/36$	$1/3$

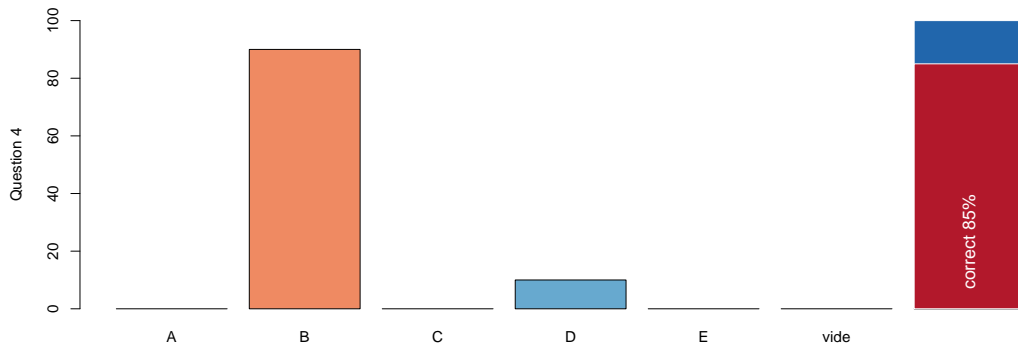
Trouver $\mathbb{P}(X \leq 2)$

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

Il faut sommer les 4 probabilités à gauche, i.e. $X \leq 2$,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{13}{36} = \frac{3 + 2 + 13}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

qui est la réponse B.



5 Le logarithme naturel de la variable aléatoire X est uniformément distribué sur l'intervalle $[-2, 2]$. Sachant que $X > 1$, calculer la probabilité que $X \leq 3$.

- A) 0.347 B) 0.452 C) 0.244 D) 0.628 E) 0.549

On nous demande

$$\mathbb{P}(X \leq 3 | X > 1) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 3\} \cap \{X > 1\})}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X \in [1, 3])}{\mathbb{P}(X > 1)}$$

le logarithme étant une fonction croissante,

$$\mathbb{P}(X \leq 3 | X > 1) = \frac{\mathbb{P}(\log(X) \in [\log(1), \log(3)])}{\mathbb{P}(\log(X) > \log(1))} = \frac{\mathbb{P}(\log(X) \in [0, \log(3)])}{\mathbb{P}(\log(X) > 0)}$$

Comme $\log(X)$ suit une loi uniforme sur $[-2, 2]$,

$$\mathbb{P}(\log(X) > 0) = \frac{2 - 0}{2 - -2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

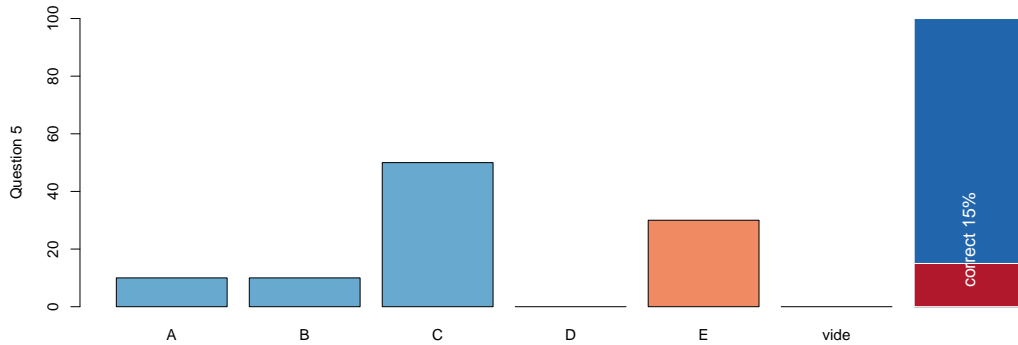
et

$$\mathbb{P}(\log(X) \in [0, \log(3)]) = \frac{\log(3) - 0}{2 - -2} = \frac{\log(3)}{4}$$

Aussi,

$$\mathbb{P}(X \leq 3 | X > 1) = \frac{\log(3)}{2} \sim 0.5493061$$

qui correspond à la réponse E.



6 Soit X une variable aléatoire de fonction de densité $f_X(x) = ax$ pour $0 \leq x \leq \sqrt{2/a}$, où $a > 0$. Si $Var[X] = 1/3$ alors que vaut a ?

- A) 1 B) 1/3 C) 1/9 D) 3 E) 9

On se lance pour calculer les deux premiers moments,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2/a}} x f(x) dx = \int_0^{\sqrt{2/a}} ax^2 dx = \left[\frac{ax^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2/a}}$$

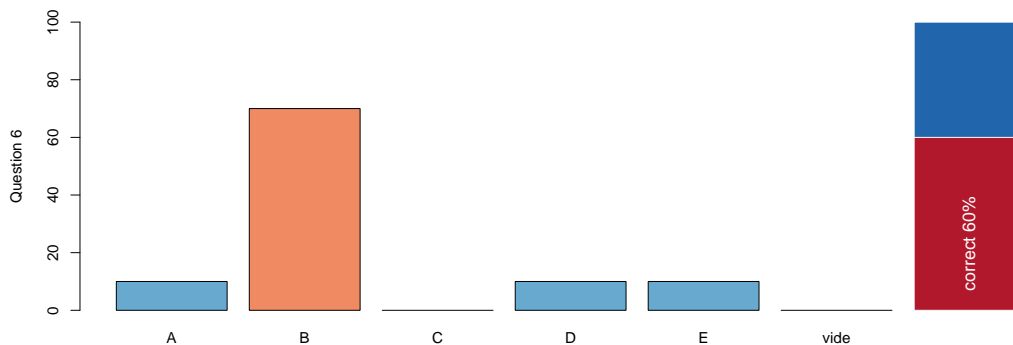
et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\sqrt{2/a}} x^2 f(x) dx = \int_0^{\sqrt{2/a}} ax^3 dx = \left[\frac{ax^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2/a}}$$

Aussi, comme $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$,

$$\text{Var}(X) = \frac{a}{4} \sqrt{2/a}^4 - \frac{a^2}{3^2} \sqrt{2/a}^{3 \times 2} = \frac{a \times 2^2}{4 \times a^2} - \frac{a^2 \times 2^3}{3^2 \times a^3} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{8}{9}\right)$$

i.e. $1/9a = 1/3$ donc $a = 1/3$, qui est la réponse B.



- 7 La durée de vie d'un néon A (respectivement B) suit une loi exponentielle de moyenne 6 ans (respectivement 3 ans). Trouver la probabilité que le néon A dure moins de 3 ans et le néon B moins de 2 ans (ils sont indépendants).

A) $\frac{1}{18} (1 - e^{-\frac{1}{2}})$ B) $\frac{1}{18} e^{-\frac{7}{6}}$ C) $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}} + e^{-\frac{7}{6}}$
D) $e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{2}{3}}$ E) $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}}$

On nous demande $\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\})$, qui peut s'écrire, par indépendance des deux durées de vie

$$\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\}) = \mathbb{P}(\{A \leq 3\}) \times \mathbb{P}(\{B \leq 2\})$$

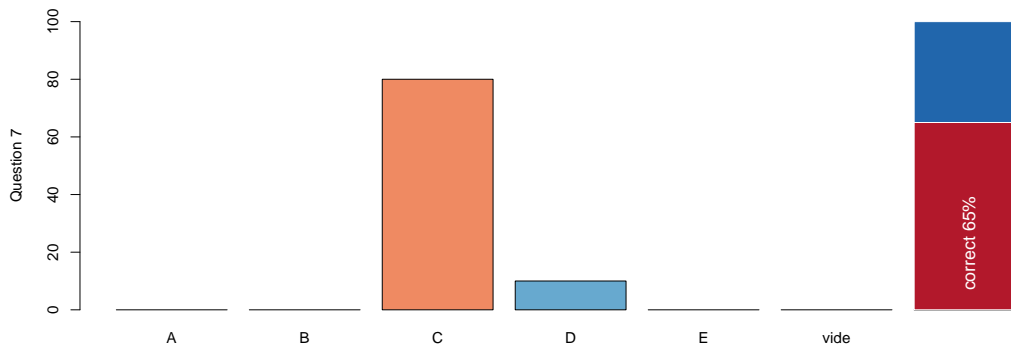
Or les fonctions de répartition des lois exponentielles sont

$$\mathbb{P}(A \leq x) = 1 - e^{-x/6} \text{ et } \mathbb{P}(B \leq x) = 1 - e^{-x/3}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{P}(\{A \leq 3\} \cap \{B \leq 2\}) = (1 - e^{-3/6}) \times (1 - e^{-2/3}) = 1 - e^{-1/2} - e^{-2/3} + e^{-(2/3+1/2)}$$

qui est la réponse C.



8 Si X est uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$, trouver $\mathbb{E}[-\ln X]$.

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{e}$ D) 1 E) e

Comme X est une variable à valeurs de $]0, 1]$, $\log(X)$ est négative, et donc $-\log(X)$ est une variable positive. Or on a vu en cours une formule simple et pratique, pour des variables positive.

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(-\log X > x) dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(\log X < -x) dx$$

en prenant l'opposé, et comme l'exponentielle est une fonction croissante

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X < \exp(-x)) dx$$

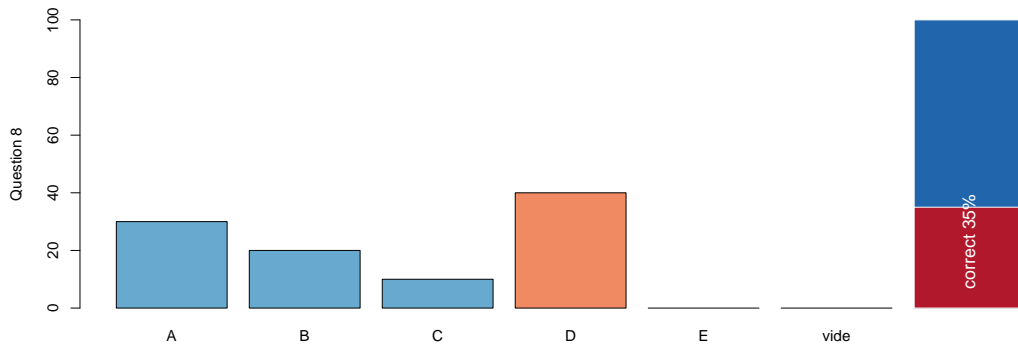
Or X est une variable uniformément distribuée sur $[0, 1]$ donc pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t) = t.$$

Aussi,

$$\mathbb{E}[-\log X] = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

qui est la réponse D. En fait, $-\log(X)$ suit une loi exponentielle, de moyenne 1.



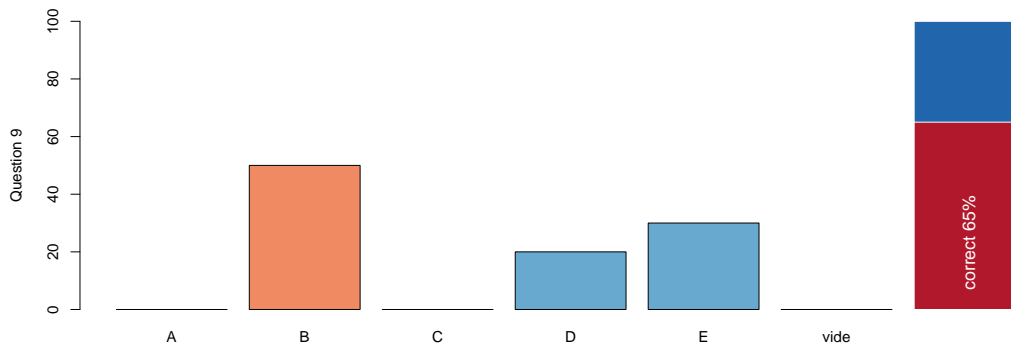
9] Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 2$ et $\mathbb{E}[X(X-4)] = 12$. Trouver l'écart-type de $Y = -3X + 12$.

- A) $\sqrt{24}$ B) 12 C) 4 D) 24 E) 144

On nous dit que $\mathbb{E}(X) = 2$ et que $\mathbb{E}(X^2 - 4X) = 12$, ou encore $\mathbb{E}(X^2) = 5 + 4\mathbb{E}(X) = 12 + 4 \times 2 = 20$. Maintenant la question est (à peu de choses près) le calcul de la variance de $-3X + 12$, qui est la variance de $3X$, ou 9 fois la variance de X . Or

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 20 - 2^2 = 16.$$

L'écart-type de X est 4 et donc, l'écart-type de $-3X + 12$ est 3 fois cette valeur, soit 12, qui est la réponse B.



10 Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = |x|$ pour $-1 \leq x \leq 1$. Trouver σ_X , l'écart-type de X .

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) 2

La densité est symétrique par rapport à 0, donc la loi est centrée sur 0, i.e. $\mathbb{E}(X) = 0$. Aussi, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2)$. Reste à faire les calculs !

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{+1} x^2|x|dx = 2 \int_0^1 x^2 x dx$$

par des propriétés de symmétrie. Si on continue

$$\mathbb{E}(X^2) = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \times \frac{1^4}{4} = \frac{1}{2}$$

La variance vaut $1/2$ et donc l'écart-type vaut $1/\sqrt{2}$. Ce qui correspond à la réponse D.

