

# Solutions Exercices Prévisions (suite)

Exos:  $\boxed{1}$ ;  $\boxed{14}$ ;  $\boxed{5}$  + prévisions  
sur l'exo  $\boxed{18}$

$\boxed{1}$  - Les données

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y_t$	1	5	4	7	10	11	12	14	17

- Modèle:  $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, 9$

(En remplaçant  $\bar{x}$  par  $t$ )

NB: Les observations de  $x$  (qui sont dans l'énoncé) ne sont pas importantes pour répondre à la question (par besoin de  $x$  !)

• Calculons l'autocorrélation échantillonnale, d'ordre 2.

Par définition, l'autocorrélation d'ordre  $k$  est donnée par:

$$\hat{\rho}_y(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

Pour  $k=2$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_y(2) = \frac{\sum_{t=1}^{T-2} (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

## Statistiques descriptives :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^9 y_t}{9} = \frac{81}{9} = 9 ; \quad \sum_{t=1}^9 y_t^2 = 941$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^9 (y_t - \bar{y})^2 &= (1-9)^2 + (5-9)^2 + (4-9)^2 + (7-9)^2 \\ &\quad + (10-9)^2 + (11-9)^2 + (12-9)^2 \\ &\quad + (14-9)^2 + (17-9)^2 \\ &= 64 + 16 + 25 + 4 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^9 (y_t - \bar{y})^2 = 212$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{9-2} (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y}) &= (1-9)(4-9) + (5-9)(7-9) \\ &\quad + (4-9)(10-9) + (7-9)(11-9) + (10-9)(12-9) \\ &\quad + (11-9)(14-9) + (12-9)(17-9) \end{aligned}$$

$$= 40 + 8 - 5 - 4 + 3 + 10 + 24$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^7 (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y}) = 76$$

et donc,

$$\hat{\rho}_y(2) = \frac{\sum_{t=1}^7 (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^9 (y_t - \bar{y})^2} = \frac{76}{212} \approx 0.35849$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_y(2) \approx 0.36 \quad \Rightarrow \text{Réponse C}$$

(2)

[4]

# Modèles Marche aléatoire

Sans dérive

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avec dérive

$$Y_t = Y_{t-1} + d + \varepsilon_t$$

- On demande l'affirmation correcte!

① - Fausse. Le processus marche aléatoire (sans ou avec dérive) n'est pas stationnaire. Pour le voir, il suffit de vérifier les conditions d'une stationnarité du second ordre. C'est-à-dire, on calcule les moments d'ordre un et deux: i.e:

$$E[Y_t] \text{ et } \text{Var}[Y_t].$$

$Y_t$  est dite stationnaire au second ordre si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

-  $E[Y_t] = \text{cste}, \forall t$

-  $\text{Var}[Y_t] = \text{cste}, \forall t$

-  $\text{Cor}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{cste}, \forall t, k \in \mathbb{Z}$

Si l'une des trois conditions n'est pas vérifiée, la série n'est pas stationnaire.

## Cas avec dérive

$t=1$		$Y_1 = Y_0 + d + \varepsilon_1$
$t=2$		$Y_2 = Y_0 + 2d + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$
⋮		⋮
$t$		$Y_t = Y_0 + td + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

(3)

- En prenant l'espérance de la dernière écriture de  $Y_t$   
On a :

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_0] + \mathbb{E}[td] + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right]$$

(par linéarité de l'espérance mathématique)

$$\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 + td + \sum_{i=1}^t \mathbb{E}[\varepsilon_i]$$

(par le fait que  $Y_0 = 0^{\text{te}}$  et  $td$  aussi,  $\forall t$ )

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t] = Y_0 + td$$

(puisque  $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ ,  $\forall i$ )

On voit que l'espérance de  $Y_t$  dépend du temps  $t$ .

$Y_t$  n'est donc pas stationnaire,

$\forall$  les deux autres conditions.

Cas sans dérive

$$\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \\ \vdots \\ t \end{array} \quad \begin{array}{l} Y_1 = Y_0 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \end{array}$$

⇒ En prenant l'espérance de la dernière écriture de  $Y_t$   
on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}[Y_0] + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) \\ &= \mathbb{E}[Y_0] + \sum_{i=1}^t \mathbb{E}[\varepsilon_i] \\ &= Y_0 + 0. \end{aligned}$$

La première condition de la stationnarité du second ordre est vérifiée ici.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Var}[Y_t] &= \text{Var}\left(Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) \end{aligned}$$

(Puisque  $Y_0$  est ~~supplé~~ constant)

$$\text{Var}[Y_t] = \sum_{i=1}^t \text{Var}(\varepsilon_i)$$

(Puisque  $\text{cor}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$ )

$$\Rightarrow \text{Var}(Y_t) = \sum_{i=1}^t \sigma_\varepsilon^2$$

(Puisque, par définition  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2, \forall i$ )

⇒  $\text{Var}(Y_t) = t \sigma_\varepsilon^2$  dépend du temps  $t$

Donc  $Y_t$  non stationnaire,  $\forall$  la 3<sup>ème</sup> condition.

② - Fausse.

Rappelons:  ~~$Y_{N+1}$~~   $\hat{Y}_{N+1}$

$\hat{Y}_{N+1}$  = prévision de  $Y_{N+1}$

- Pour un niveau de probabilité fixé  $\alpha$  (par exemple), plus on avance dans le temps (c'est à dire, plus l'horizon de prévision augmente  $h=1, 2, \dots$ ) plus les bornes de l'intervalle de probabilité augmente d'un facteur  $\sqrt{h}$ . Elles ne s'approchent donc pas des droites horizontales, pour un modèle de marche aléatoire avec dérive.

$${}^N Y_{N+h} = Y_N + h d.$$

③ - Vraie. ~~Ce cas peut se~~ c'est le cas pour une marche aléatoire sans dérive.

$${}^N Y_{N+h} = Y_N, \forall h$$

1re:

Exp-pièce:

$$y_t = \sum_{k=1}^K p_k y_{t-k} + \dots$$

$$H_0: p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$$

$$H_1: \exists k, p_k \neq 0.$$

ici:  $k=15$  et non 85.

(E)

Fausse. Rien n'est sûr qu'à 95% que les coefficients d'autocorrélations sont tous nuls!

Puisque, si on prend  $\alpha = 5\%$ , la probabilité critique ou conditionnelle ~~est~~ à l'hypothèse  $H_0$

$$1re: \alpha = P[\text{Rejette } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = 5\%$$

$$\alpha = P[\Phi > \chi^2(15) \mid p_1 = p_2 = \dots = p_{15} = 0]$$

il vient,

$$1-\alpha = P[\text{Accepte } H_0 \mid H_0 \text{ vraie}] = 95\%$$

$$1-\alpha = P[\Phi < \chi^2(15) \mid p_1 = p_2 = \dots = p_{15} = 0]$$

$\Rightarrow$  la probabilité que  $\Phi$  soit plus petite que  $\alpha$  de  $\chi^2(15)$  sachant que  $p_1 = p_2 = \dots = p_{15} = 0$  est de 95%.

Oser, l'affirmation dans  $E$  est :

$$P \{ p_1 = p_2 = \dots = p_{15} = 0 \mid Q < \chi^2(15) \} = 95\%$$

$$P \{ H_0 \text{ vraie} \mid \text{Accepte } H_0 \}$$

ie: la probabilité que les  $p_k$ ,  $k=1, \dots, 15$  soient tous simultanément égaux à 0, sachant qu'on a accepté l'hypothèse nulle, est de 95%.

Ce qui n'est pas sûr, puisque  $P \{ H_0 \text{ vraie} \mid \text{Accepte } H_0 \}$  n'est pas connue.