

Solutions Exercices Prénormés

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	1	4	5	7	4	4	8	1	2	4

- On demande de calculer l'autocorrélation d'ordre 2, pour Y.

On sait que:

$$\hat{\rho}_Y(k) = \frac{\widehat{\text{Cov}}(y_t, y_{t+k})}{\widehat{\text{Var}}(y_t)}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

Et donc, pour $k=2$ on a:

$$\hat{\rho}_Y(2) = \frac{\sum_{t=1}^{10-2} (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{10} (y_t - \bar{y})^2}$$

où $\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{10} y_t}{10} = 4$

$$\text{Ans: } \hat{\rho}_Y(2) = \frac{(1-4)(5-4) + (4-4)(7-4) + (5-4)(4-4) + (7-4)(4-4) + (4-4)(8-4) + (4-4)(1-4) + (8-4)(2-4) + (1-4)(4-4)}{(1-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (8-4)^2 + (1-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_Y(2) = -\frac{11}{48} = -0,229 \Rightarrow \underline{\text{Réponse A}}$$

(1)

3] On donne $Y_t = t$, $t = 1, 2, \dots, 99$

Y_t : processus déterministe : elle dépend du temps

$$Y_t = f(t) = 0 + t$$

Stats. descriptives :

$$\sum_{t=1}^{99} t = 4950 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{99} t^2 = 328350$$

\Rightarrow Calculus $\hat{\rho}_{Y(t)}$:

$$\hat{\rho}_{Y(t)} = \frac{\sum_{t=1}^{99-1} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{99} (Y_t - \bar{Y})^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{98} (t - \bar{t})(t+1 - \bar{t})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{99} (t - \bar{t})^2}}$$

ici : $\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{99} t}{99} = 50 = \bar{t}$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_{Y(t)} = \frac{\sum_{t=1}^{98} (t - \bar{t})(t+1 - \bar{t})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{99} (t - \bar{t})^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{98} (t^2 + t - 2t\bar{t} - \bar{t} + \bar{t}^2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{99} (t^2 - 2t\bar{t} + \bar{t}^2)}}$$

$$\hat{\rho}_{Y(t)} = \frac{\sum_{t=1}^{98} t^2 + \sum_{t=1}^{98} t - 2\bar{t} \sum_{t=1}^{98} t - 98\bar{t} + 98\bar{t}^2}{\sqrt{\sum_{t=1}^{99} t^2 - 2\bar{t} \sum_{t=1}^{99} t + 99\bar{t}^2}}$$

(2)

On a: $\sum_{t=1}^{98} t^2 = \sum_{t=1}^{99} t^2 - (99)^2 = 328350 - 9801 = 318549$

$\sum_{t=1}^{98} t = \sum_{t=1}^{99} t - 99 = 4950 - 99 = 4851$

$\bar{t}^2 = 50^2 = 2500$

$\Rightarrow \hat{\rho}_{Y(1)} = \frac{318549 + 4851 - 2 \times 50 \times 4851 - 98 \times 50 + 98 \times 2500}{328350 - 2 \times 50 \times 4850 + 99 \times 2500}$

$\Rightarrow \hat{\rho}_{Y(1)} \approx 0.97$
 \Rightarrow Réponse C

Ex 6. Soit Y_t : la série temporelle en question

$Y_t = 1, 2, \dots, 21$ et t
 $\sum_{t=1}^n t = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{t=1}^n t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 21$ et $Y_t = t$, $t = 1, \dots, 21$

Calculons $\hat{\rho}_{Y(2)}$
 $\hat{\rho}_{Y(2)} = \frac{\sum_{t=1}^{21-2} (Y_t - \bar{y})(Y_{t+2} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{21} (Y_t - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{19} (t - \bar{t})(t+2 - \bar{t})}{\sum_{t=1}^{21} (t - \bar{t})^2}$

$$\Rightarrow \hat{p}_Y(2) = \frac{\sum_{t=1}^{19} (t^2 + 2t - 2t\bar{t} - 2\bar{t} + \bar{t}^2)}{\sum_{t=1}^{21} (t^2 - 2t\bar{t} + \bar{t}^2)}$$

On a:

$$\sum_{t=1}^{19} t = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

$$\sum_{t=1}^{19} t^2 = \frac{19 \times 20 \times (2 \times 19 + 1)}{6} = 2470$$

$$\sum_{t=1}^{21} t^2 = \frac{21 \times 22 \times (2 \times 21 + 1)}{6} = 3311$$

$$\bar{t} = 11 \text{ et } \bar{t}^2 = 121$$

$$\sum_{t=1}^{21} t = \frac{21 \times 22}{2} = 231$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{p}_Y(2) &= \frac{2470 + 2 \times 190 - 2 \times 190 \times 11 - 2 \times 19 \times 11 + 19 \times 121}{3311 - 2 \times 231 \times 11 + 21 \times (11)^2} \\ &= \frac{551}{770} \approx 0.72 \end{aligned}$$

\Rightarrow Réponse A.

7 | Résultats d'investissement pour cinq années consécutives d'un fond mutuel :

t : 1 2 3 4 5

y_t : 0.07 0.06 0.07 0.10 -0.05 \rightarrow Rendements

Déterminons $\hat{\rho}_Y(2)$

$$\hat{\rho}_Y(2) = \frac{\sum_{t=1}^{5-2} (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^5 (y_t - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{t=1}^3 (y_t - \bar{y})(y_{t+2} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^5 (y_t - \bar{y})^2}}$$

On a : $\bar{y} = 0.05$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_Y(2) = \frac{(0.07 - 0.05)(0.07 - 0.05) + (0.06 - 0.05)(0.10 - 0.05) + (0.07 - 0.05)(-0.05 - 0.05)}{(0.07 - 0.05)^2 + (0.06 - 0.05)^2 + (0.07 - 0.05)^2 + (0.10 - 0.05)^2 + (-0.05 - 0.05)^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_Y(2) = \frac{0.004 + 0.005 - 0.002}{0.0004 + 0.0001 + 0.0004} = -0.0821 \approx -0.1$$

\Rightarrow réponse E

[12] Modèle ARIMA(1,1,1), T=110

$\hat{\rho}_k$: fonction d'autocorrélation des résidus

Lag k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\rho}_k$	0.01	-0.05	-0.11	0.13	-0.05	0.04	0.14	-0.01	-0.02

- Calculons la statistique de Box-Pierce $-X^2(Q)$

On sait: $Q = T \sum_{k=1}^k \hat{\rho}_k^2$

$$= 110 (0.01^2 + 0.05^2 + 0.11^2 + 0.13^2 + 0.05^2 + 0.04^2 + 0.01^2 + 0.02^2)$$

$$Q = 6.13$$

\Rightarrow Réponse D.

[14] Modèle Marche aléatoire avec dérive

$$Y_t = Y_{t-1} + d + \varepsilon_t$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, T=60 \text{ observat}^\circ$$

On a estimé

$$\hat{d} = -2.5 \text{ et } \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 4, Y_{60} = 57.3$$

\rightarrow Déterminons la précision pour 2 périodes, partant de la dernière observation de Y, soit Y_{60} :

\Rightarrow ~~Notons~~ Notons $T \hat{Y}_{T+h}$: la prévision de Y à l'horizon h .

$$\begin{aligned} \text{On a: } T \hat{Y}_{T+1} &= \mathbb{E}[Y_{T+1} | Y_T] \\ &= \mathbb{E}[Y_T + d + \varepsilon_{T+1} | Y_T] \\ &= \mathbb{E}[Y_T | Y_T] + \mathbb{E}[d | Y_T] + \mathbb{E}[\varepsilon_{T+1} | Y_T] \\ &= Y_T + \hat{d} \end{aligned}$$

Ans: ~~2.5~~

$${}_{60} \hat{Y}_{61} = Y_{60} + \hat{d} = 57.3 - 2.5 = 54.8$$

2) veut,

$$\begin{aligned} {}_{60} \hat{Y}_{62} &= \mathbb{E}[Y_{T+2} | Y_{T+1}] \\ &= \mathbb{E}[Y_{T+1} + d + \varepsilon_{T+2} | Y_{T+1}] \\ &= \mathbb{E}[Y_{T+1} | Y_{T+1}] + \mathbb{E}[d | Y_{T+1}] + 0 \\ &= Y_{T+1} + \hat{d} = T \hat{Y}_{T+1} + \hat{d} = Y_T + 2\hat{d} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}_{60} \hat{Y}_{60+2} = 57.3 - 2 \times 2.5 = 52.3$$

\Rightarrow Réponse A

16

On a: Deux marches aléatoire

Avec dérive

$$Y_t = Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

Sans dérive

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

A. Vrai. Puisque, $\forall k$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{t+k} Y_{t+k} | Y_t &= \mathbb{E} \sum_{t+k-1} Y_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} | Y_t \\ &= Y_{t+k-1} + 0 \end{aligned}$$

$k=1$

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t$$

$$\hat{Y}_{t+2} = \hat{Y}_{t+1} = Y_t$$

⋮

$$\hat{Y}_{t+h} = \hat{Y}_{t+h-1} = Y_t$$

B. Vrai. Puisque, pour une marche aléatoire sans dérive l'erreur de prévision est:

$$\begin{aligned} e_t(k) &= Y_{t+k} - \mathbb{E} \sum_{t+k} Y_{t+k} | Y_t \\ &= Y_{t+k} - \hat{Y}_{t+k} \end{aligned}$$

$k=1$

$$\begin{aligned} e_t(1) &= Y_{t+1} - \mathbb{E} \sum_{t+1} Y_{t+1} | Y_t = Y_{t+1} - \mathbb{E} \sum_{t+1} Y_t + \varepsilon_t | Y_t \\ &= Y_{t+1} - Y_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall h=2 \quad e_T(2) &= Y_{T+2} - Y_T = Y_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - Y_T \\ &= Y_T + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - Y_T \\ &= \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$e_T(h) = \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i}$$

La variance conditionnelle est :

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_T(h) | Y_T) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i} | Y_T\right) \\ &= \sum_{i=1}^h \text{Var}(\varepsilon_{T+i} | Y_T) = \sum_{i=1}^h \text{Var}(\varepsilon_{T+i}) \end{aligned}$$

$\varepsilon_i \perp Y_T$ et non corrélatures des erreurs.
 $= h \sigma_\varepsilon^2$

$$\Rightarrow \sigma_{e_T(h) | Y_T} = \sqrt{h} \cdot \sigma_\varepsilon$$

On voit que pour h ~~plus~~ ^{chaque} l'écart-type croît avec.

c. Vrai. Puisque pour une marche aléatoire avec dérive.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{T+h} &= \mathbb{E}[Y_{T+h} | Y_T] = \mathbb{E}\left[Y_T + \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i} + hd | Y_T\right] \\ &= Y_T + hd + \mathbb{E}[\varepsilon_{T+1} | Y_T] \\ &\quad + \dots + \mathbb{E}[\varepsilon_{T+h} | Y_T] \end{aligned}$$

$$\hat{Y}_{T+h} = Y_T + hd.$$

(9)

il vient,

$$e_T(h) = Y_{T+h} - \hat{Y}_{T+h}$$

$$= Y_T + \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i} + h d - Y_T - h d$$

$$= \sum_{i=1}^h \varepsilon_{T+i} \quad \text{--- l'erreur ne dépend pas de la forme de dérivée.}$$

$$\Rightarrow \text{Var} (e_T(h) / Y_T) = h \sigma_\varepsilon^2$$

Et donc, $\sigma(e_T(h) / Y_T) = \sqrt{h} \sigma_\varepsilon$

Comme dans le cas de la marche aléatoire sans dérive,

E. Faux. On l'a vu.

18 - On a $T = 100$ observations

$\hat{\beta}_k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	0.6	0.02	0.02	-0.16	-0.14	-0.01	0.03	0.01	0.01	-0.04	0.03	0.10	-0.17	0.02	0.01

$$\text{Box-Pierce: } Q = T \sum_{k=1}^{15} \hat{\beta}_k^2 = 9.38$$

\Rightarrow On doit décider si la série a été générée par un processus bruit blanc ou non.

Soit Y_t le processus, $\mathbb{E}[Y_t] = 0$? $\text{Var}[Y_t] = \sigma_y^2$ constante et $\mathbb{E}[Y_t \cdot Y_{t+h}] = 0$?

A. vrai. Le bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$ pour moyenne nulle, $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1$

B. Faux. Puisque le test de Box-Pierce test la nullité des coefficients d'autocorrélation de façon individuelle.

$$\hat{\rho}_1 = 0, \hat{\rho}_2 = 0 \dots$$

C. Faux. Pour les mêmes raisons que dans (B)

D. Faux. C'est plutôt 15 comme degré de liberté

E. Faux. Rien n'est sûr que à 95% que les coefficients sont tous nuls.

122 | On a un modèle ARMA(1,1) T=100

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\hat{\rho}_k$	-0.02	-0.03	-0.01	-0.14	-0.17	-0.01	0.03	-0.02	0.02	...

$$\text{Calculons } Q: \quad Q = T \sum_{k=1}^{15} \hat{\rho}_k^2 = 11.81 \approx 12$$

\Rightarrow Réponse E

123 | Processus stochastique:

$$Y_1, Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_T$$

$$\tilde{1}) \quad Y_1 = Y_{-1} \quad ; \quad Y_0 = Y_0$$

$$\tilde{2}) \quad \mathbb{E}[Y_t] = 0, \quad \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Var}[Y_t] = 1$$

$$\text{iii) } \Delta^2 Y_t = \varepsilon_t - 0,5 \varepsilon_{t-1}$$

⇒ déterminons la covariance entre $Y_T - 2Y_{T-1} + Y_{T-2}$
et $Y_{T-3} - 2Y_{T-4} + Y_{T-5}$.

on a: $Y_{T-3} - 2Y_{T-4} + Y_{T-5} = \Delta^2 Y_{T-3}$.

Propriété:

$$\Delta^2 Y_{T-3} = \varepsilon_{T-3} - 0,5 \varepsilon_{T-4}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 Y_{T-3} &= \Delta(Y_{T-3} - Y_{T-4}) \\ &= (Y_{T-3} - Y_{T-4}) - (Y_{T-4} - Y_{T-5}) \\ &= Y_{T-3} - 2Y_{T-4} + Y_{T-5} \end{aligned}$$

il vient $\Delta^2 Y_{T-3} = \varepsilon_{T-3} - 0,5 \varepsilon_{T-4}$

D'autre part: on remarque que:

$$\begin{aligned} \Delta^2 Y_T &= \Delta(Y_T - Y_{T-1}) \\ &= (Y_T - Y_{T-1}) - (Y_{T-1} - Y_{T-2}) \\ &= Y_T - Y_{T-1} - Y_{T-1} + Y_{T-2} \\ &= Y_T - 2Y_{T-1} + Y_{T-2} \end{aligned}$$

il vient $Y_T - 2Y_{T-1} + Y_{T-2} = \varepsilon_T - 0,5 \varepsilon_{T-1}$

$$\Rightarrow \text{Cov}(Y_T - 2Y_{T-1} + Y_{T-2}, Y_{T-3} - 2Y_{T-4} + Y_{T-5})$$

$$= \text{Cov}(E_T - 0.5E_{T-1}, E_{T-3} - 0.5E_{T-4})$$

$$= 0 \quad \text{par indépendance de } E_i$$

→ Réponse C