

# Solutions Exercices lissage

**A1**  $|Y_t| < 10, \forall t$

⇒ Prédiction pour  $Y_{101}$ , avec  $d=0,9$

Le modèle de lissage exponentiel simple s'écrit:

$$L_t = d y_t + (1-d) L_{t-1}$$

La prédiction à l'horizon  $h$  est donnée par la formule suivante:

$$T \hat{Y}_{T+h} = d \sum_{k=0}^{h-1} (1-d)^k y_{T-k}$$

A10:  $T=100, h=1$

$$\begin{aligned} \text{on a: } {}_{100} \hat{Y}_{100+1} &= y_{101} = d y_{100} + d(1-d) y_{100-1} + d(1-d)^2 y_{100-2} + d(1-d)^3 y_{100-3} \\ &\quad + d(1-d)^4 y_{100-4} \\ &= d y_{100} + d(1-d) y_{99} + d(1-d)^2 y_{98} + d(1-d)^3 y_{97} + d(1-d)^4 y_{96} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \hat{Y}_{T+1} &= 0,9 \times 7,3 + 0,9 \times 0,1 \times 8,2 + 0,9 \times (0,1)^2 \times 5,5 + 0,9 \times (0,1)^3 \times 8,9 \\ &\quad + 0,9 (0,1)^4 \times 7,1 \end{aligned}$$

$$= 6,57 + 0,738 + 0,0495 + 0,0089 + 0,00071$$

$$y_{101} = 7,267 \approx 7,4$$

⇒ Réponse D

A2 | Faux. Puisque pour  $\alpha \rightarrow 1$ , le poids décroît rapidement et implique un lissage léger de la série avec:  
 $y_t \approx y_0$ .

A3

$t$	Policiers	$t$	Policiers
1	Jan 21	6	juin 18
2	Feb 14	7	juil 15
3	Mar 19	8	Aug 14
4	Apr 20	9	sep 22
5	Mai 29	10	oct 28
		11	Nov ?

\* Prédiction pour ~~nombre~~ nombre, 1<sup>ère</sup> mois, avec  $\alpha = 0.25$   
 • lissage exponentiel simple:

$$\text{Prédiction: } \hat{y}_{T+h} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k y_{T-k}$$

$$\Rightarrow T=10, h=1$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{T+1} = \hat{y}_{11} &= \alpha y_{10} + \alpha(1-\alpha)y_9 + \alpha(1-\alpha)^2 y_8 \\ &+ \alpha(1-\alpha)^3 y_7 + \alpha(1-\alpha)^4 y_6 \\ &+ \alpha(1-\alpha)^5 y_5 + \alpha(1-\alpha)^6 y_4 \\ &+ \alpha(1-\alpha)^7 y_3 + \alpha(1-\alpha)^8 y_2 + \alpha(1-\alpha)^9 y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{y}_{T+1} = \hat{y}_{11} &= 0.25 \times 28 + 0.25 \times 0.75 \times 22 + 0.25 \times (0.75)^2 \times 14 + 0.25 \times (0.75)^3 \times 15 \\ &+ 0.25 \times (0.75)^4 \times 18 + 0.25 \times (0.75)^5 \times 29 + \\ &0.25 \times (0.75)^6 \times 20 + 0.25 \times (0.75)^7 \times 19 + 0.25 \times (0.75)^8 \times 14 \\ &+ 0.25 \times (0.75)^9 \times 21 \end{aligned}$$

$${}_{10} \hat{y}_{10+1} = 21 = \hat{y}_{10}(1) \Rightarrow (2)$$

(3)

ou encore:  $\checkmark N^2 N(2) = N^2 N(1)$   $\checkmark$   $A \in$

$N^2 N^{2+2} = N^2 N(1)$

**A5** | Vous pouvez vérifier expérimentalement que la formule de récurrence à une seule qui ne comporte pas de fondance.

la formule:  $\checkmark N^2 = \sum_{k=0}^n (1-d)^k y_{89-k}$

après:  $\checkmark \log = \alpha y_{89} + \alpha(1-d)y_{88} + \alpha(1-d)^2 y_{87} + \dots$

$\alpha(1-d)^2 = 0.6(1-0.6)^2 = 0.096$

b) - pour 1987 de plus à accorder 87:

a)  $\checkmark \log = \alpha y_{89} + (1-d) \log = 0.6 \times 1,000 + 0.4 \times 1,000 = 1,040$

$L_{88} = 1,000$

$y_{89} = 1,000$ ,  $\alpha = 0.6$

On dispose de renseignements suivants:

$L_t = \alpha y_t + (1-d) L_{t-1}$  avec  $\checkmark y_{t+1} = \checkmark y_t + \checkmark$   $A \in$

**A4** | - change expérimental (sans fondance):

**A6** Faux : ~~Dans un modèle de lissage exponentiel~~ Jusqu'à  
 pour un lissage exponentiel simple  $\hat{y}_{N+2}$  et égale  
 à la moyenne pondérée de  $y_{N+1}$  et  $\hat{y}_N$ .

En d'autres termes, si  $N$  est la dernière année  
 d'observation de la série  $y$ , et  $\hat{y}_{N+1}$  la valeur  
 prédite de  $y$  à l'horizon  $h=1$ . Alors, la prévision  
 de  $y$  à l'horizon  $h=2$  serait la moyenne  
 pondérée de la valeur de  $y$  prédite à l'année  $N$   
 et de la valeur courante (i.e.  $y_{N+1}$ ).

**A7**

t	1	2	3	4	5
$y_t$	2,000	3,000	4,000	6,000	1,500

$L_1 = 2,000 = L_0$   
(donnée)

\* lissage exponentiel simple

$$L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)L_{t-1}$$

a). Prévisions des observations 2, 3, 4 et 5  
 avec le lissage exponentiel simple :

Cas  $\alpha = 0,1$  :

$$L_1 = 0,1 \times 2,000 + (1-0,1) \times (2,000) = 2,000$$

$$L_2 = 0,1 \times 3,000 + (1-0,1) \times (2,000) = 2,100$$

$$L_3 = 0,1 \times (4,000) + (1-0,1) \times (2,100) = 1,990$$

$$L_4 = 0,1 \times (6,000) + (1-0,1) \times (1,990) = 2,371$$

$$L_5 = 0,1 \times (1,500) + (1-0,1) \times (2,371) =$$

$$= 0,15 + 2,1339 = 2,2839$$

Cas  $d = 0.9$

$$L_1 = 0.9 \times 2,000 + 0.1 \times 2,000 = 2,000$$

$$L_2 = 0.9 \times 3,000 + 0.1 \times 2,000 = 2,900$$

$$L_3 = 0.9 \times 1,000 + 0.1 \times 2,900 = 1,190$$

$$L_4 = 0.9 \times 6,000 + 0.1 \times 1,190 = 5,519$$

$$L_5 = 0.9 \times 1,500 + 0.1 \times 5,519 = 1.35 + 0.5519 = 1,9019$$

b). On choisira  $d = 0.1$ . Pour la simple raison que : pour avoir des valeurs futures bien lissées il faut que  $d$  soit proche de zéro.

c). On a :

$$\begin{aligned} L_5 &= d y_5 + (1-d) L_4 = d y_5 + (1-d) (d y_4 + (1-d) L_3) \\ &= d y_5 + d(1-d) y_4 + (1-d)^2 L_3 \\ &= d y_5 + d(1-d) y_4 + (1-d)^2 [d y_3 + (1-d) L_2] \\ &= d y_5 + d(1-d) y_4 + d(1-d)^2 y_3 + (1-d)^3 L_2 \end{aligned}$$
$$\hat{y}_5 = d y_4 + d(1-d) y_3 + \underbrace{d(1-d)^2}_{\text{Poids}} y_2 + \dots$$

Pour  $d = 0.1$

$$\Rightarrow \text{Poids} = 0.1 (1-0.1)^2 = 0.081$$

Pour  $d = 0.9$

$$\Rightarrow \text{Poids} = 0.9 (1-0.9)^2 = 0.009$$

[A8] Faux. Plus  $\alpha$  est proche de zéro, plus ~~les~~ la série est bien lissée, ainsi que des valeurs futures. (lissage révére).

[A9] Vraie. Dans un lissage exponentiel simple, plus  $\alpha$  est grand, plus on donne du poids aux observations récentes.

[A10]

	$\alpha = 0.1$	et	$L_0 = 27$		
$t$	1	2	3	4	5
$y_t$	20	30	10	60	15

Déterminons  $L_5$

On utilise la formule :

$$L_t = \alpha y_t + (1-\alpha) L_{t-1}$$

Ans:

$$L_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha) L_0 = 0.1 \times 20 + 0.9 \times 27 = 26,3$$
$$L_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha) L_1 = 0.1 \times 30 + 0.9 \times 26,3 = 26,67$$
$$L_3 = \alpha y_3 + (1-\alpha) L_2 = 0.1 \times 10 + 0.9 \times 26,67 = 25$$
$$L_4 = \alpha y_4 + (1-\alpha) L_3 = 0.1 \times 60 + 0.9 \times 25 = 28,5$$
$$L_5 = \alpha y_5 + (1-\alpha) L_4 = 0.1 \times 15 + 0.9 \times 28,5 = 27,15$$

$\Rightarrow$  Réponse E

A11 | Lissage exponentiel :  $\alpha = 0,1$ .

Déterminons  $\Delta L_{20}$ , avec  $\Delta y_0 = (20 - 10) = 10$

$$\Delta L_{20} = (1 - \alpha)^{20} \Delta y_0 = (1 - 0,1)^{20} (20 - 10) = 1,2$$

$\Rightarrow$  Réponse B

A12 | Lissage exponentiel simple:

$\alpha = 0,6$  et  $L_0 = 103$

t	1	2	3	4
$y_t$	95	119	109	126

Déterminons  $\sum_{t=1}^4 \varepsilon_{t-1}^2$  (1)

On a :  $L_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) L_{t-1}$

$$L_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha) L_0 = 0,6 \times 95 + (1 - 0,6) \times 103 = 98,20$$

$$L_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha) L_1 = 0,6 \times 119 + (1 - 0,6) \times 98,20 = 110,68$$

$$L_3 = \alpha y_3 + (1 - \alpha) L_2 = 0,6 \times 109 + (1 - 0,6) \times 110,68 = 109,67$$

$$L_4 = \alpha y_4 + (1 - \alpha) L_3 = 0,6 \times 126 + (1 - 0,6) \times 109,67 = 119,47$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^4 \varepsilon_{t-1}^2 (1) &= \varepsilon_0^2 (1) + \varepsilon_1^2 (1) + \varepsilon_2^2 (1) + \varepsilon_3^2 (1) \\ &= (y_1 - L_0)^2 + (y_2 - L_1)^2 + (y_3 - L_2)^2 + (y_4 - L_3)^2 \\ &= (95 - 103)^2 + (119 - 98,20)^2 + (109 - 110,68)^2 \\ &\quad + (126 - 109,67)^2 = 766 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Réponse E

(7)

A13 | lissage exponentiel double:

$$\tilde{L}_t = \alpha L_t + (1-\alpha) \tilde{L}_{t-1}$$

On dispose de informations suivantes:

$$L_t = 2.73 \text{ et } \tilde{L}_{t-1} = 2.41 ; \alpha = 0.2$$

Déterminons  $\hat{L}_t$ :

$$\text{ona: } \hat{L}_t = 0.2 \times 2.73 + (1-0.2) \times 2.41 = 2.5$$

$\Rightarrow$  Réponse E

A14 | Lissage exponentiel simple:  $L_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k y_{t-k}$

$$\text{avec: } L_t = \alpha y_t + (1-\alpha) L_{t-1}$$

On donne:  $\alpha = 0.60$

Déterminons  $L_5$

Sachant:

t	1	2	3	4	5
$y_t$	15.6	3.4	13.3	-4.6	-1.8

$$\text{On a: } L_5 = \alpha y_5 + \alpha(1-\alpha)y_4 + \alpha(1-\alpha)^2 y_3 + \alpha(1-\alpha)^3 y_2 + \alpha(1-\alpha)^4 y_1$$

$$= 0.6 \cdot (-1.8) + 0.6 \times 0.4 \times (-4.6) + 0.6 \times (0.4)^2 \times 13.3 + 0.6 \times (0.4)^3 \times 3.4 + 0.6 \times (0.4)^4 \times 15.6$$

$$L_5 \approx -0.5 \Rightarrow \text{réponse B}$$

(8)



A15 - lissage exponentiel

$$d = 0.2$$

Informations:  $L_{1995} = 20$ ,  $y_{1996} = 27$ ,  $y_{1997} = 29$

Déterminons  $L_{1997}$

$$\Rightarrow L_{1997} = d y_{1997} + (1-d) L_{1996}$$

$$\text{ou } L_{1996} = d y_{1996} + (1-d) L_{1995}$$

Il vient:

$$L_{1997} = d y_{1997} + d(1-d) y_{1996} + (1-d)^2 L_{1995}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_{1997} &= 0.2 \times 29 + 0.2 \times 0.8 \times 27 + (0.8)^2 \times 20 \\ &= 5.8 + 4.32 + 12.8 = 22.92 \approx 23 \end{aligned}$$

⇒ Réponse A

A16 - Lissage exponentiel à deux paramètres,  
Holt-Winter:

$$d = 0.4 \text{ et } \beta = 0.2$$

$$L_{t-1} = 20, B_t = 4.4 \text{ et } B_{t-1} = 5$$

$$\text{On a: } \begin{cases} L_t = d y_t + (1-d) (L_{t-1} + B_{t-1}) & (1) \\ B_t = \beta (L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) B_{t-1} & (2) \end{cases}$$

Déterminons  $y_t$

$$\text{De l'équation (2), on a: } L_t = \frac{B_t - (1-\beta) B_{t-1}}{\beta} + L_{t-1}$$

(9)

$$\Rightarrow L_t = \frac{4,1 - (1-0,2) \times 5}{2} + 20 = 20,5$$

En remplaçant  $L_t$  dans l'équation (1), on trouve:

$$Y_t = \frac{L_t - (1-\alpha)(L_{t-1} + B_{t-1})}{\alpha}$$

$$\text{Avec: } Y_t = \frac{20,5 - (1-0,4)(20 + 5)}{0,4} = 14$$

$\Rightarrow$  Réponse A

[A7]

issage exponentiel à deux paramètres,

Holt-winter:

t	$Y_t$	$L_t$	$B_t$
1995	120.5	120	10.0
1996	135.0	131.5	11.2
1997	147.7	144.2	12.4
1998	146.6	$L_{1998}$	$B_{1998}$

Déterminons la précision à l'horizon  $h=2$

$$\text{c'est-à-dire } \begin{matrix} \uparrow \\ 1998 \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 1998+2 \end{matrix} = 1998 \begin{matrix} \uparrow \\ 2000 \end{matrix}$$

$L_{98}$  et  $B_{98}$

Pour y arriver, on trouve d'abord  $\alpha$  et  $\beta$  tel que:

$$L_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + B_{t-1})$$

$$B_t = \beta (L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) B_{t-1}$$

Pour  $t = 1996$ , on a :

$$L_{96} = 131,5 = \alpha Y_{96} + (1-\alpha)(L_{95} + B_{95})$$

$$131,5 = \alpha \times 135 + (1-\alpha)(120 - 10)$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,3$$

$$B_{96} = 11,2 = \beta(L_{96} - L_{95}) + (1-\beta)B_{95}$$

$$11,2 = \beta(131,5 - 120) + (1-\beta) \times 10$$

$$\Rightarrow \beta = 0,8$$

Pour  $t = 1998$ , on a :

$$L_{98} = \alpha Y_{98} + (1-\alpha)(L_{97} + B_{97}) = 0,3 \times 146,6 + (1-0,3)(144,2 - 12,4) = 153,6$$

$$B_{98} = \beta(L_{98} - L_{97}) + (1-\beta)B_{97}$$

$$= 0,8(153,6 - 144,2) + (1-0,8) \cdot 12,4 = 10$$

il faut

$$L_{98} \quad L_{99} \quad L_{2000}$$

Pour trouver maintenant  ${}_{1998} \hat{Y}_{2000}$ , on utilise la formule suivante :

$${}_T \hat{Y}_{T+h} = L_T + h B_T$$

AN :  
 $T = 1998$  ;  $h = 2$

$${}_{1998} \hat{Y}_{1998+2} = {}_{1998} \hat{Y}_{2000} = 153,6 + 2 \times 10 = 173,6$$

$\Rightarrow$  Réponse E

(11)

A18 | On dispose:

$$\bar{a}) \quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_t & 1 & 1,2 & 1,3 \end{array}$$

$$\bar{a}i) \quad y_t = 0, \quad \forall t < 0$$

$$\bar{a}ii) \quad \alpha = 0,6$$

⇒issage exponentiel double:

$$\hat{L}_t = \alpha L_t + (1-\alpha) \hat{L}_{t-1}$$

Déterminons  $\hat{L}_2$

D'abord, à partir de l'équation deissage exponentiel simple:

$$L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)L_{t-1}$$

$$L_0 = \alpha y_0 + (1-\alpha)L_{-1} = 0,6 \times 1 + 0,4 \times 0 = 0,6$$

$$L_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)L_0 = 0,6 \times 1,2 + 0,4 \times 0,6 = 0,96$$

$$L_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)L_1 = 0,6 \times 1,3 + 0,4 \times 0,96 = 1,164$$

En utilisant la formule deissage double:

$$\hat{L}_0 = \alpha L_0 + (1-\alpha)\hat{L}_{-1} = 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0 = 0,36$$

$$\hat{L}_1 = \alpha L_1 + (1-\alpha)\hat{L}_0 = 0,6 \times 0,96 + 0,4 \times 0,36 = 0,72$$

$$\hat{L}_2 = \alpha L_2 + (1-\alpha)\hat{L}_1 = 0,6 \times 1,164 + 0,4 \times 0,72 = 0,9864$$

⇒ réponse B

A19

A. Vraie.

B. Vraie.

C. Faux. c'est une vraie moyenne.

Il s'agit bien d'une moyenne.

$$d \sum_{k=0}^{\infty} (1-d)^k = d \left( \frac{1 - (1-d)^{\infty}}{1 - (1-d)} \right)$$

soit une suite géométrique de raison (1-d) de première terme d.

Pour  $k \rightarrow \infty$ ,

$$d \left( \frac{1 - (1-d)^{\infty}}{1 - (1-d)} \right) \rightarrow \frac{d}{d} = 1.$$

D. Vraie.

E. Vraie. Puisque  $\sum_{T+h}^{\infty} Y_{T+h} = \sum_{T+1}^{\infty} Y_{T+1} \forall h$ .

A20

- lissage exponentiel simple  $\alpha = 0.1$

Prévisions à ~~l'horizon~~ (étape par étape)

$${}^t \hat{Y}_{t+1} = L_t, \quad t = 0, 1, 2, 3.$$

t	$Y_t$	$L_t = {}^t \hat{Y}_{t+1}$
0		81
1	80	?
2	81	?
3	89	?
4	74	?

Determinants  $\frac{1}{4} \sum_{t=1}^4 (Y_t - \hat{Y}_t)$ , où  $L_t = t \hat{Y}_t$

Déclard:  $L_t = 0.1 Y_t + 0.9 L_{t-1}$

$$L_1 = 0.1 Y_1 + 0.9 L_0 = 0.1 \times 80 + 0.9 \times 81 = 80.9$$

$$L_2 = 0.1 Y_2 + 0.9 L_1 = 0.1 \times 81 + 0.9 \times 80.9 = 80.91$$

$$L_3 = 0.1 Y_3 + 0.9 L_2 = 0.1 \times 89 + 0.9 \times 80.91 = 81.719$$

$$L_4 = 0.1 Y_4 + 0.9 L_3 = 0.1 \times 74 + 0.9 \times 81.719 = 80.9471$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{t=1}^4 (Y_t - L_t) &= \frac{1}{4} \left[ (80 - 80.9) + (81 - 80.91) \right. \\ &\quad \left. + (89 - 81.719) + (74 - 80.9471) \right] \\ &= -0.1190 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Réponse B

# Méthode lissage Moyenne Mobile à n périodes (MA(n))

(B2)

$y_t$ : nombre de voiture restantes

$t$ : semaine

$T$ : 8 semaines.

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_t$	121	132	144	161	143	154	168	183

└──────────┘
└──────────┘  
1<sup>er</sup> mois
2<sup>ème</sup> mois

Rappel: si  $y_t$  est lissée avec la méthode MA(n), on écrit:

$$L_t = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{t-k} = \frac{1}{n} (y_{t-1} + y_{t-2} + \dots + y_{t-n})$$

Prédiction: à l'horizon  $h$ :

$$T \hat{y}_{T+h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n y_{T-(k-h)}$$

AN:  $T=8$ ,  $h=1$ , on a:

$$\begin{aligned} 8 \hat{y}_9 &= \frac{1}{4} (y_8 + y_7 + y_6 + y_5) \\ &= \frac{1}{4} (183 + 168 + 154 + 143) \\ &= 162 \text{ camions} \end{aligned}$$

⇒ Réponse C

[89]

$t$  98 99 100 101 102 103 104 105  
 $y_t$  100 99 101 ? ? ? ? ?

- Méthode de lissage Double Movable à 3 périodes,  $m=3$

Ce modèle Aléatoire:

$$y_t = \frac{1}{3} (y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3})$$

- Prévisions:

$$\hat{y}_{T+h} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m y_{T+h-k}$$

$$h=1, T=100 \Rightarrow \hat{y}_{101} = \frac{1}{3} (y_{100} + y_{99} + y_{98}) = 100$$

$$h=2, T=100 \Rightarrow \hat{y}_{102} = \frac{1}{3} (\hat{y}_{101} + y_{100} + y_{99}) = 100$$

$$h=3, T=100 \Rightarrow \hat{y}_{103} = \frac{1}{3} (\hat{y}_{102} + \hat{y}_{101} + y_{100}) = 100,33$$

$$h=4, T=100 \Rightarrow \hat{y}_{104} = \frac{1}{3} (\hat{y}_{103} + \hat{y}_{102} + \hat{y}_{101}) = 100,11$$

$$h=5, T=100 \Rightarrow \hat{y}_{105} = \frac{1}{3} (\hat{y}_{104} + \hat{y}_{103} + \hat{y}_{102}) = 100,1481$$

Et donc  $(\hat{y}_{105} - \hat{y}_{104}) = 100,1481 - 100,11 = 0,0381$

$$\approx 0,04$$

Response  $\Rightarrow$

(16)



B5

A. Vrai. Seulement, dans le lissage exponentiel on accorde plus du poids ~~à~~ l'information présente pour prévoir l'observat<sup>o</sup> future, ~~et~~ dans la méthode Moyenne Mobile à n périodes, on accorde le même poids aux informations passées.

B. Vrai.

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^{k-1} = 1, \quad |1-\alpha| < 1$$

B. vrai. si  $\alpha \rightarrow 1$

D. Vrai.

E. Faux. Car la prévision avec le modèle lissage exponentiel est constante si que  $\alpha$  est fixé.

## Rappels : Lissage Exponentiel

\* lissage exponentiel simple

Soit  $y_t$  ~ série,  $t = 1, \dots, T$

$t$ : années, mois, trimestres, semestres, hebdomadaire ...

On part de ?

$$L_t = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k y_{t-k} \\ = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1 \quad (1)$$

$$\text{On écrit : } (1-\alpha)L_{t-1} = \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1 \quad (2)$$

En pratique, on soustrait ces 2 équations pour obtenir la formule de récurrence suivante :

$$L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)L_{t-1}$$

Chaque nouvelle valeur prédite et donc calculée comme la somme pondérée de l'observation courante de la série et de l'observation précédente prédite.

La précédente observation prédite ( $L_{t-1}$ ) ~~est elle-même~~ résulte elle-même de la somme pondérée de la valeur précédente observée et de la valeur prédite avant cette valeur précédente etc...

Plus  $\alpha$  est proche de zéro, plus la série est lissée. Si  $\alpha = 0$ , l'observation courante est totalement ignorée, et la ~~pré~~ valeur prédite ne porte que sur les valeurs prédites précédentes.

: qui est calculée à partir de l'observation lissée qui lui précède ; etc. : c'est pourquoi, toutes les valeurs précédentes auront la même valeur que la valeur initiale  $h_0$ ).

$$L_0 = \gamma_0$$

(4-d) : correspond aux coefficients des modèles MA

plus  $\alpha$  proche de 1, moins la série est lissée (lissage léger).

si  $\alpha = 1$ , les observations précédentes sont complètement ignorées

Et donc, les poids ~~et~~ décroissent exponentiellement selon  $\alpha$ .

$\Rightarrow$  regarder la série des résidus :  $\gamma_t - L_t = \hat{\epsilon}_t$ .

$\rightarrow$  ACF ( ~~$\hat{\epsilon}_t$~~ ) or BB.  $\Rightarrow$  bien lissée.

$\Rightarrow$  Lorsqu'une série présente une tendance à la hausse ou à la baisse, le lissage exponentiel simple se prête mal, il va soit surestimer le seuil ou sous-estimer, il faut alors utiliser le lissage exponentiel double.

\* Lissage exponentiel double :

En pratique toutefois, on peut souhaiter effectuer un lissage important, mais sans donner trop de poids aux observations lointaines. On utilise le lissage exponentiel double.

$\rightarrow$  (B) page

\* Prédiction à l'horizon  $h$ ; avec lissage exponentiel simple

notation:  $\hat{y}_{T+h} = \hat{y}_T(h)$

$$\hat{y}_{T+h} = d \sum_{k=1}^{h-1} (1-d)^{k-1} y_{T+h-k} + d \sum_{k=0}^{\infty} (1-d)^{k+h-1} y_{T-k}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{T+h} = d \sum_{k=0}^{\infty} (1-d)^k y_{T-k} = L_T$$

⇒ Lissage exponentiel double:

On utilise:  $\tilde{L}_t = \alpha L_t + (1-\alpha) \tilde{L}_{t-1}$

avec  $\alpha$  grand.

On utilise cette formule aux changements moyens de la tendance de long terme (c'est si la série admet une tendance: pour faire du lissage exponentiel et deux paramètres de Holt-Winters:

$$\begin{cases} L_t = \alpha y_t + (1-\alpha) (L_{t-1} + B_{t-1}) \\ B_t = \beta (L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) B_{t-1} \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in ]0, 1[$

$B_t$ : est la série lissée représentant la tendance.  
(i.e: le taux moyen de croissance.)

- Cette tendance est ajoutée lors du lissage afin d'éviter que le lissage exponentiel de  $y_t$  ne s'éloigne trop des valeurs récentes de la série originale  $y_t$ .

$L_0 = y_0, B_0 = (y_1 - y_0)$

(3)

⇒ Prévision de l'horizon h

$$\hat{y}_{T+h} = \hat{y}_T(h) = L_T + h B_T$$

$$L_{t-1} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k y_{t-1-k}$$

$$= \alpha y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-2} y_1$$

$$(1-\alpha)L_{t-1} = \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} y_1$$

(1)-(2) ⇒

$$\hat{y}_{T+h} = \alpha \sum_{k=1}^h (1-\alpha)^{k-1} y_{T+h-k} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k y_{T-h-k}$$

$$= \alpha y_{T+h-1} + \alpha(1-\alpha)y_{T+h-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{h-2} y_{T+1}$$

$$+ \alpha(1-\alpha)^{h-1} y_T + \alpha(1-\alpha)^h y_{T-1} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{T-h} y_1$$