

Solutions Exercices ARMA (suite)

①. Modèle MA

A3 - Modèle MA(1)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad t=1, \dots, N$$

où $\mu = \theta_0$ (de la définition)

On dispose : $\mu = 1$, $\theta_1 = -0.5$ et $Y_N = 8$

⇒ Déterminons $N \hat{Y}_{N+1}$: prévision à l'horizon $h=1$

Par définition,

$$\begin{aligned} N \hat{Y}_{N+1} &= \hat{Y}_N^{(1)} = \mathbb{E} [Y_{N+1} | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N] \\ &= \mathbb{E} [\mu + \varepsilon_{N+1} - \theta_1 \varepsilon_N | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N] \\ &= \mathbb{E} [\mu | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N] + \mathbb{E} [\varepsilon_{N+1} | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N] \\ &\quad - \theta_1 \mathbb{E} [\varepsilon_N | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N \hat{Y}_{N+1} = \mu + \mathbb{E} [\varepsilon_{N+1}] - \theta_1 \mathbb{E} [\varepsilon_N | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N]$$

(Puisque $\mu = \text{cte}$, $\varepsilon_i \perp Y_j$ pour $i > j$)

$$\Rightarrow N \hat{Y}_{N+1} = \mu + 0 - \theta_1 \mathbb{E} [\varepsilon_N | \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_N]$$

NB: ε_N n'est pas indépendant de Y_N !! inconnue

Et donc Réponse \mathbb{E}
(1)

1A7

Modèle MA(1)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

- Calculons $\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = \text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \gamma_y(1)$

notation: $\gamma_y(k) = \mathbb{E}[(y_t - \mathbb{E}[y_t])(y_{t-k} - \mathbb{E}[y_{t-k}])] = \gamma_y(-k)$

Rappel: le modèle MA(q) est par hypothèse un modèle stationnaire (y_t est stationnaire)

Donc: $\mathbb{E}[y_t] = \mathbb{E}[y_{t+k}]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

il vient,

$$\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = \mathbb{E}[(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \mu)(\mu + \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \mu)]$$

$$= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})]$$

$$= \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}]$$

$$= \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}] - \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-2}]$$

$$- \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2] + \theta_1^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}]$$

$$\mathbb{E}[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \neq -\theta_1$$

Puisque: $\mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}] = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \mathbb{E}[\varepsilon_t])(\varepsilon_{t-1} - \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}])]$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-2}] = 0$, aussi de même $\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}] = 0$

(2)

$$\text{et } [E \sum \varepsilon_{t-1}^2] = \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) \\ = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \\ \uparrow \\ \text{(Hypothèse de Bruit Blanc)}$$

⇒ Réponse Fausse.

A8 - Modèle MA(1)

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \phi_1 \varepsilon_{t-1}$$

• On veut savoir si l'autocorrélation d'ordre $k > 1$ est nulle.

$$\Leftrightarrow \hat{\rho}_Y(k) \stackrel{?}{=} 0, \forall \text{ ~~k~~ } k > 1$$

Epre effet,

$$\rho_Y(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ -\frac{\phi_1}{1+\phi_1^2} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Voir rappels sur modèle MA(1).

Et donc $\rho_Y(2) = \rho_Y(3) = \dots = \text{~~0~~ } 0$

⇒ Réponse Vraie.

A9

Modèle MA(2)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

$$\text{ou } \mu=0, \theta_1=0.2, \theta_2=0.7.$$

- Calculus $\rho_Y(z)$

Rappels:

$$\rho_Y(k) = \frac{\gamma_Y(k)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t+k})}{\text{Var}(Y_t)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma_Y(k) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])(Y_{t+k} - \mathbb{E}[Y_{t+k}])] \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+k} - \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} - \theta_2 \varepsilon_{t+k-2})] \end{aligned}$$

En développant on arrive à

$$\gamma_Y(k) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\ -\theta_2 \sigma_\varepsilon^2, & k=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho_Y(z) = \frac{\gamma_Y(2)}{\gamma_Y(0)} = \frac{-\theta_2 \sigma_\varepsilon^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

(Celle formule se trouve également dans PDF rappels ARMA)

Et donc

$$\rho_Y(2) = \frac{-0,7}{1 + 0,2^2 + 0,7^2} = -0,4575 \dots$$
$$\approx -0,46$$

⇒ Réponse A

A10

Modèle MA(1) sans constante

$T = 50$ observations

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

Le consultant croit que $\theta > 0,9$. Il a calculé

$$\hat{\rho}_Y(1) = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} = 0,93$$

- On sait que pour un MA(1), la fonction d'autocorrélation d'ordre 1 est:

$$\rho_Y(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$$
$$= 0,93$$

Si $\theta > 0,9$, alors $\rho_Y(1) < 0$. Ce qui contredit l'énoncé, puisque $\rho_Y(1) = 0,93$.

⇒ Réponse Fausse.

A13

Mobile MA(12)

$$\text{Dann: } w_t = y_t - y_{t-12}$$

$$= \varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-12}$$

$$\text{mit } \theta_{12} = 0.5, \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = 0$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1), \varepsilon_i \perp \varepsilon_j, i \neq j$$

- Calculus $\gamma_w(1) = \frac{\gamma_w(1)}{\gamma_w(0)}$

$$\begin{aligned} * \gamma_w(0) &= \text{Var}(w_t) = \mathbb{E}[w_t^2] - (\mathbb{E}[w_t])^2 \\ &= \mathbb{E}[(\varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-12})^2] - (\mathbb{E}[\varepsilon_t - 0.5 \varepsilon_{t-12}])^2 \\ &= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 + 0.5^2 \varepsilon_{t-12}^2 - 2 \times 0.5 \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-12}] \\ &\quad - (\mathbb{E}[\varepsilon_t] - 0.5 \cdot \mathbb{E}[\varepsilon_{t-12}])^2 \\ &= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + 0.5^2 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-12}^2] - \mathbb{E}[\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-12}] \\ &\quad - (0 - 0.5 \times 0)^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + 0.5^2 \sigma_\varepsilon^2 - 0 = 1 + 0.5^2 \times 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_w(0) = 1.25$$

(6)

$$\begin{aligned}
 * \gamma_W(1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-2} ; \varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-3}) \\
 &= \text{Cov}(\varepsilon_t ; \varepsilon_{t-1}) - 0.5 \text{Cov}(\varepsilon_t ; \varepsilon_{t-3}) \\
 &\quad - 0.5 \text{Cov}(\varepsilon_{t-2} ; \varepsilon_{t-1}) + 0.5^2 \text{Cov}(\varepsilon_{t-2} ; \varepsilon_{t-3})
 \end{aligned}$$

$$\gamma_W(1) = 0$$

↑
non corrélation des ε_i

Et donc, $\rho_W(1) = \frac{\gamma_W(1)}{\gamma_W(0)} = \frac{0}{1.25} = 0$

Réponse C

A18

Modèle MA(2)

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \mu$$

où $\mu = 0$, $\theta_1 = -0.8$, $\theta_2 = 0.5$

- L'autocorrélation d'ordre 1.

$$\begin{aligned}
 \rho_Y(1) &= \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\mathbb{E}[(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})]}{\mathbb{E}[(y_t - \bar{y})^2]} = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-1})}{\text{Var}(y_t)} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad | \text{ c'est la même}
 \end{aligned}$$

ici: $\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3})]$
avec $\bar{y} = \mu = \mathbb{E}[y_t]$

(7)

En développant on doit trouver

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \gamma_Y(1) = \theta_1 \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ans: } \text{Var}(y_t) &= \gamma_Y(0) = \mathbb{E}[y_t^2] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2] \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

(Ces formules se trouvent également dans le PDF)
rappels ARMA

Et donc,

$$\rho_Y(1) = \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

Ans:

$$\rho_Y(1) = \frac{-(-0.8) + (-0.8)(0.5)}{1 + (-0.8)^2 + (0.5)^2} = \frac{0.4}{1.89}$$

$$\approx 0.211640 - -$$

$$\approx 0.2$$

⇒ Réponse D

A2.1

On donne, pour un processus stochastique Y_t

$$\rho_Y(1) = -0.31 ; \rho_Y(2) = -0.155 ; \rho_Y(k) = 0, k > 2$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 0.7$$

- Déterminons θ_1

D'abord on voit que :

$$\rho_Y(1) \neq 0, \rho_Y(2) \neq 0 \text{ et } \rho_Y(k) = 0, \forall k > 2.$$

Ce qui veut dire qu'on a à faire à un ~~MA(2)~~ MA(2) ^{Processus} qui est bien évidemment stationnaire.

On sait, (voir PDF appels ARMA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_Y(1) = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_Y(2) = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\rho_Y(1)}{\rho_Y(2)} = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{-\theta_2}$$

$$\frac{-0.31}{-0.155} = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{-\theta_2} = - \frac{(\theta_1 - \theta_1\theta_2)}{-\theta_2} = \frac{\theta_1 - \theta_1\theta_2}{\theta_2}$$

(3)

$$2 = \frac{\theta_1 - \theta_1 \theta_2}{\theta_2}$$

$$2\theta_2 = \theta_1 - \theta_1 \theta_2$$

Comme $\theta_1 + \theta_2 = 0.7 \Rightarrow \theta_2 = 0.7 - \theta_1$

Et donc,

$$2\theta_2 = 2(0.7 - \theta_1)$$

$$\text{et } \theta_1 \theta_2 = \theta_1 (0.7 - \theta_1)$$

Il vient,

$$2(0.7 - \theta_1) = \theta_1 - \theta_1 (0.7 - \theta_1)$$

$$1.4 - 2\theta_1 = \theta_1 - 0.7\theta_1 + \theta_1^2$$

$$\Rightarrow \theta_1^2 + 2.3\theta_1 - 1.4 = 0 \quad (\text{Equation } 2^{\text{e}} \text{ degré})$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2.3)^2 - 4(1)(-1.4) = 2.3^2 + 5.6$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2.3 + \sqrt{(2.3)^2 - 4 \times 1 \times (-1.4)}}{2} \approx 0.15 \\ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2.3 - \sqrt{(2.3)^2 - 4 \times 1 \times (-1.4)}}{2} \approx -2.8 \end{cases}$$

Pour ce dans A_2 , on choisira θ_1 qui

$$\text{minimise } \text{Var}(y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2 \quad (\text{MA}(2))$$

Et donc $\theta_1 = 0.5$

②. Modèle AR(p)

B1 - AR(1)

$$\text{Soit } Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

D'après le cours (voir PDF appelé ARMA).

La fonction d'autocorrélation de ce type de processus est : (AR(1)) :

$$\rho_Y(k) = \phi_1^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

avec $|\phi_1| < 1$ (pour la stationnarité)

Plus $k \nearrow \infty$, plus $\rho_Y(k) \rightarrow 0$, car $|\phi_1| < 1$

Et donc le graphique représenterait bien le corélogramme d'un processus AR(1) - (PACF)

- Réponse vraie.

B3 - AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

On donne : $\rho_Y(1) = 0,5$ et $\rho_Y(2) = 0,25$

- Calculons ϕ_1

On utilise ici les équations de Jules-Walker:

$$\begin{cases} \rho_Y(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_Y(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 0.5 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \Rightarrow 0.5(1-\phi_2) = \phi_1$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \frac{0.5 - \phi_1}{0.5}$$

$$\phi_2 = 1 - 2\phi_1 \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (2) \Rightarrow 0.2 = \frac{\phi_1^2}{1-(1-2\phi_1)} + 1 - 2\phi_1$$

$$\Rightarrow 0.2 = \frac{\phi_1^2}{2\phi_1} + 1 - 2\phi_1$$

$$\Rightarrow 0.2 = 0.5\phi_1 + 1 - 2\phi_1$$

$$\Rightarrow 0.2 = 1 - 1.5\phi_1$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \frac{1-0.2}{1.5} = 0.533... \approx 0.5$$

Réponse E

(12)

B4

AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

$$t = 1, \dots, 99$$

On donne:

$$\phi_1 = 0,25, \phi_2 = -\frac{1}{8}, \mathbb{E}[Y_t] = 16, Y_{98} = 14 \text{ et } Y_{99} = 20$$

- On demande $\sum_{t=1}^{99} Y_{t+1}$ i.e: $\sum_{t=1}^{99} Y_{100}$ (prévision à horizon $h=1$)

D'après le rappels (conférence PDF Rappels ARMA)

les conditions de stationnarité pour AR(2) sont:

$$|\phi_1 + \phi_2| < 1 \text{ et } |\phi_2| < 1$$

on a:

$$* |\phi_1 + \phi_2| = 0,25 - \frac{1}{8} = 0,125 < 1 \quad (\text{OK})$$

$$* |\phi_2| = |-\frac{1}{8}| = \frac{1}{8} < 1 \quad (\text{OK})$$

$\{Y_t\}$ - est donc bien stationnaire.

D'après PDF rappels ARMA, (cas AR(2))

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

$$\Rightarrow \phi_0 = \mathbb{E}[Y_t] (1 - \phi_1 - \phi_2) \\ = 16 (1 - 0,25 + \frac{1}{8}) = 14$$

$$\phi_0 = 14$$

B7

- AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

$$\phi_1 = 0.3 \text{ et } \rho_Y(1) = 0.6$$

- Calculons $\rho_Y(2)$

On utilise les équations de Yule-Walker :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_Y(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_Y(2) = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 0.6 = \frac{0.3}{1 - \phi_2} \Rightarrow 0.6(1 - \phi_2) = 0.3$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \frac{0.6 - 0.3}{0.6} = 0.5 \quad (3)$$

$$(3) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \rho_Y(2) = \frac{0.3^2}{1 - 0.5} + 0.5 = 0.68 \approx 0.7$$

Réponse E.

[B10] -

AR(2)

$$\phi_0 = 0, \phi_1 = 0.5 \text{ et } \phi_2 = 0.4$$

- Calculons $P_Y(3)$

D'après la PDF rappelle ARMA: Cas AR(2)

$$P_Y(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{\phi_1}{1-\phi_2} & \text{si } k=1 \\ \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 & \text{si } k=2 \end{cases}$$

$$\left(\phi_1 P_Y(k-1) + \phi_2 P_Y(k-2) \right) \text{ si } k \geq 2$$

$$* P_Y(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} = \frac{0.5}{1-0.4} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833$$

$$P_Y(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 = \frac{0.5^2}{1-0.4} + 0.4 \approx 0.817$$

ou encore: (la même chose)

$$P_Y(2) = \phi_1 P_Y(1) + \phi_2 P_Y(0) = 0.5(0.833) + 0.4(1) \approx 0.817$$

Et donc

$$P_Y(3) = \phi_1 P_Y(2) + \phi_2 P_Y(1) \approx 0.5(0.817) + 0.4 \times 0.833 \approx 0.74$$

Réponse A

(16)

BR

AR(1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

On donne: $\hat{\phi}_1 = -0.6$ et ~~$\hat{\phi}_1 = -0.6$~~ $E[Y_t] = 50 = \mu$

$$Y_{70} = 46$$

- Calculons ${}_{70}\hat{Y}_{71}$: prévision de Y_{71} (horizon $h=1$)

D'abord: $|\hat{\phi}_1| = |-0.6| = 0.6 < 1$

$\{Y_t\}$ ~~process~~ est généré par un AR(1) stationnaire.

\Rightarrow Par la stationnarité on a:

$$E[Y_t] = \frac{\hat{\phi}_0}{1 - \hat{\phi}_1} \Rightarrow \hat{\phi}_0 = E[Y_t] \cdot (1 - \hat{\phi}_1)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_0 = 50(1 + 0.6) = 80$$

On a donc tous les paramètres i.e.:

$$\hat{\phi}_0 = 80 \text{ et } \hat{\phi}_1 = -0.6$$

Et donc:

$$\begin{aligned} {}_{70}\hat{Y}_{71} &= E[Y_{71} | Y_1, \dots, Y_{70}] \\ &= E[\hat{\phi}_1 Y_{70} + \hat{\phi}_0 + \varepsilon_{71} | Y_1, \dots, Y_{70}] \\ &= E[\hat{\phi}_1 Y_{70} | Y_1, \dots, Y_{70}] + E[\hat{\phi}_0 | Y_1, \dots, Y_{70}] \\ &\quad + E[\varepsilon_{71} | Y_1, \dots, Y_{70}] \\ {}_{70}\hat{Y}_{71} &= \hat{\phi}_1 Y_{70} + \hat{\phi}_0 + \underbrace{E[\varepsilon_{71}]}_0 \end{aligned}$$

(17)

~~BR~~

$$\Rightarrow 70 \hat{y}_{71} = -0.6(46) + 80 = 52.4$$

\Rightarrow Réponse D

B14

AR(1)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

$$t = 1, \dots, 600$$

$$\mathbb{E}[\sum y_t] = 36 = \hat{\mu}$$

On donne:
$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} = 0.57 = \hat{\sigma}_y$$

$$\hat{\rho}_y(1) = 0.36$$

Supposons que $|\phi_1| < 1$, donc AR stationnaire (forte hypothèse !!)
 d'un sa marche pas.

- Calculons $\hat{\phi}_0$

Erreur dans l'annonce (les OCO non applicable ici, peu d'information !!!)

Si AR(1) stationnaire, alors,

D'après PDF rappels ARMA:

$$\rho_y(k) = \phi_1^k \Rightarrow \hat{\rho}_y(1) = \hat{\phi}_1 = 0.36$$

Et donc,
$$\hat{\phi}_0 = \mathbb{E}[\sum y_t] (1 - \hat{\phi}_1) = 36 (1 - 0.36) = 23.04 \approx 23$$

Réponse C

BF

AR(1)

$$y_t - \mu = \phi (y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

$$y_t = \phi y_{t-1} - \phi \mu + \mu + \varepsilon_t$$

$$y_t = \phi y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

$$\text{ou } \phi_0 = -\phi \mu + \mu$$

on a :

t	1	2	3	4	5	6
y_t	14	5	11	4	11	3

- Calculons $\hat{\phi}$ (estimateur) par Yule-Walker
 Pour AR(1), on a (D'après PDF Rappel's ARMA)

on sait

$$\rho_Y(k) = \phi^k$$

$$* \hat{\rho}_Y(1) = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \bar{y})(y_{t+1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

Stats-descriptive

$$\sum_{t=1}^6 y_t^2 = 488, \quad \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 y_t = \bar{y} = \frac{48}{6} = 8$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_Y(1) = \frac{-66}{104} = -0.63461 \approx -0.6$$

et donc, ~~car~~ $\hat{\rho}_Y(1) = -0.6$

$$\text{Avec } \hat{P}_Y(1) = \hat{\phi}_1 = -0.6.$$

\Rightarrow Réponse B.

319

AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

$$\phi_0 = 0$$

On donne: $P_Y(1) = 0.6$ et $P_Y(2) = 0.4$

- On cherche le modèle correspondant à $P_Y(1)$ et $P_Y(2)$.

* Utilisons les équations de Yule-Walker:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_Y(1) = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_Y(2) = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \phi_1 = P_Y(1) (1 - \phi_2) \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow P_Y(2) = \frac{P_Y(1)^2 (1 - \phi_2)^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

$$P_Y(2) = P_Y(1)^2 (1 - \phi_2) + \phi_2$$

$$P_Y(2) = P_Y(1)^2 - \phi_2 P_Y(1)^2 + \phi_2$$

(20)

$$\Rightarrow P_Y^{(2)} - P_Y^{(1)} = \phi_2 (1 - P_Y^{(1)})$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \frac{P_Y^{(2)} - P_Y^{(1)}}{1 - P_Y^{(1)}} \quad (4)$$

$$\textcircled{4} \text{ (1)} \Rightarrow \phi_1 = P_Y^{(1)} \left[1 - \frac{(P_Y^{(2)} - P_Y^{(1)})}{1 - P_Y^{(1)}} \right]$$

$$\phi_1 = P_Y^{(1)} \left[\frac{1 - P_Y^{(1)} - P_Y^{(2)} + P_Y^{(1)}}{1 - P_Y^{(1)}} \right]$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \frac{P_Y^{(1)} (1 - P_Y^{(2)})}{1 - P_Y^{(1)}}$$

et donc,

$$\phi_1 = \frac{0.6 (1 - 0.4)}{1 - 0.6^2} = 0.5625$$

$$\phi_2 = \frac{0.4 - 0.6^2}{1 - 0.6^2} = 0.0625$$

$$\Leftrightarrow Y_t = 0.5625 Y_{t-1} + 0.0625 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Réponse c

B21 -

AR(2)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Supposons que $\{Y_t\}$ est stationnaire, on donne

$$\hat{\rho}_Y(1) = -0.5 \text{ et } \hat{\rho}_Y(2) = 0$$

- Estimateur ~~de~~ $\hat{\phi}_2$ (de ϕ_2)

On utilise Yule-Walker:

Comme dans B19.

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_Y(2) - \hat{\rho}_Y(1)^2}{1 - \hat{\rho}_Y(1)^2} = \frac{0 - (-0.5)^2}{1 - (-0.5)^2} = -\frac{0.25}{0.75}$$

$$\hat{\phi}_2 = -\frac{1}{3}$$

Réponse B.

(3) - Modèle ARMA(p,q)

C3

ARMA(1,1)

$$Y_t = 0.5 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t - 0.2 \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{ou } \phi_0 = 0, \phi_1 = 0.5 \text{ et } \theta_1 = 0.2$$

D'après PDF Rappel ARMA, Cas ARMA(1,1)

$$P_Y(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1)} & \text{si } k=1 \\ \phi_1 P_Y(k-1) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Et donc:

$$P_Y(1) = \frac{(0.5 - 0.2)(1 - 0.5 \times 0.2)}{(1 + 0.2^2 - 2 \times 0.2 \times 0.5)} = \frac{0.27}{0.84} = 0.321428571$$
$$\approx 0.3$$

Réponse C

C4

ARMA(1,1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

On donne: $\phi_1 = 0.8$ et $P_Y(1) = 0.6$

- Calculons $P_Y(2)$

D'après PDF Rappel ARMA(1,1)

ona: $P_Y(k) = \phi_1 P_Y(k-1), k \geq 1$

Il vient,

$$\begin{aligned} P_Y(2) &= 0.8 (0.6) = \phi_1 P_Y(1) \\ &= 0.48 \approx 0.5 \end{aligned}$$

réponse D

C5

ARMA(1,1)

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.25 \varepsilon_{t-1}$$

on $\phi_0 = 0, \phi_1 = 1, \theta_1 = -0.25$

$T=100$; on donne: $100 \hat{Y}_{101} = 25 = \hat{Y}_{100}^{(1)}$

Après mis à jour des données on a :

$$Y_{101} = 28$$

- Calculons ~~101~~ \hat{Y}_{102}

Donc :

$$\hat{Y}_{101}^{(1)} = 101 \hat{Y}_{102} = \mathbb{E} [Y_{102} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$
$$= \mathbb{E} [Y_{101} + \varepsilon_{102} + 0.25 \varepsilon_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$= \mathbb{E} [Y_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$+ \mathbb{E} [\varepsilon_{102} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$+ \mathbb{E} [0.25 \varepsilon_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$101 \hat{Y}_{102} = Y_{101} + \mathbb{E} [\varepsilon_{102}] + 0.25 \mathbb{E} [\varepsilon_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$= Y_{101} + 0 + 0.25 \mathbb{E} [\varepsilon_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}]$$

$$\mathbb{E} [\varepsilon_{101} | Y_{11}, \dots, Y_{101}] \neq 0$$

ε_{101} est l'erreur de prévision observée lorsque on a fait la prévision pour Y_{101} .

$$\varepsilon_{101} = Y_{101} - \hat{Y}_{101}^{(1)} = Y_{101} - 100 \hat{Y}_{101}$$

$$= 28 - 25 = 3$$

Si on avait pas mis à jour les données $\varepsilon_{101} \neq 3$ (aléatoire)

Donc : ~~$101 \hat{Y}_{102} = 28 + 0 + 0.25$~~

(25)

il vient,

$$\mathbb{E} \left[\varepsilon_{101} \mid y_{11}, \dots, y_{101} \right] = \mathbb{E} [\varepsilon] = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } 101 \hat{y}_{102} &= 28 + 0 + 0.25 \times 3 \\ &= 28.75 \end{aligned}$$

⇒ Réponse E

C7

$$\text{ARMA}(1,1) : Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{ou } \frac{\rho_Y(2)}{\rho_Y(1)} = 0.3 \text{ et } \sum_{\bar{i}=1}^{\infty} \rho_Y(\bar{i}) = 0.8$$

- Calculons $\rho_Y(1)$.

D'après PDF rappels ARMA(1,1) :

$$\rho_Y(k) = \phi_1 \rho_Y(k-1), \quad k \geq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{\rho_Y(2)}{\rho_Y(1)} = 0.3 &\Rightarrow \rho_Y(2) = 0.3 \rho_Y(1) \\ &\Rightarrow \phi_1 = 0.3 \end{aligned}$$

(26)

il vient,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_Y(i) = 0,8$$
$$= P_Y(1) + P_Y(2) + \dots$$

$$= P_Y(1) + \phi_1 P_Y(1) + \phi_1 P_Y(2) + \dots \quad \text{car } P_Y(k) = \phi_1 P_Y(k-1) \quad k > 1$$

$$= P_Y(1) + \phi_1 P_Y(1) + \phi_1 (\phi_1 P_Y(1)) + \phi_1 (\phi_1 P_Y(2)) + \dots$$

⋮

$$= P_Y(1) [1 + \phi_1 + \phi_1^2 + \phi_1^3 + \phi_1^4 + \dots]$$

Soit suite géométrique
à l'infini

$$0,8 = P_Y(1) \cdot \left(\frac{1}{1 - \phi_1} \right)$$

$$0,8 = P_Y(1) \left(\frac{1}{1 - 0,3} \right)$$

$$\Rightarrow P_Y(1) = \frac{0,8}{\frac{1}{1 - 0,3}} = 0,56$$

Réponse C

C8

ARMA(1,3)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$

où $\theta_j = 0$, $\mathbb{E}[Y_t] = 100 = \mu$

$$\phi_1 = 0.5$$

$$\theta_1 = 0.2$$

$$\theta_3 = 0.1$$

$$\Leftrightarrow \phi_0 = \mathbb{E}[Y_t] (1 - \phi_1)$$

$$\phi_0 = 100 (1 - 0.5) = 50$$

On donne:

t	1	2	3	4
Y_t	90	98	109	103
\hat{Y}_t	94	100	108	98

- Calculons $4 \hat{Y}_5 = 4 \hat{Y}_4^{(1)}$

a) - initialisations des erreurs non observées

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \dots = 0$$

b) - initialisations des valeurs passées non observées

$$Y_0 = Y_{-1} = Y_{-2} = \dots = \mathbb{E}[Y_t] = 100$$

c) Calculons $\hat{\varepsilon}_t$, $t=1, 2, \dots, 4$

$$\varepsilon_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_0 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$

$$\begin{aligned} t=1 \quad \hat{\varepsilon}_1 &= y_1 - \phi_1 y_0 - \phi_0 + \theta_1 \varepsilon_0 + \theta_3 \varepsilon_{-2} \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=2 \quad \hat{\varepsilon}_2 &= y_2 - \phi_1 y_1 - \phi_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_1 + \theta_3 \varepsilon_{-1} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=3 \quad \hat{\varepsilon}_3 &= y_3 - \phi_1 y_2 - \phi_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_2 + \theta_3 \varepsilon_0 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=4 \quad \hat{\varepsilon}_4 &= y_4 - \phi_1 y_3 - \phi_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_3 + \theta_3 \hat{\varepsilon}_1 \\ &= -4.3 \end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned} 4\hat{y}_5 &= 4\hat{y}_4(1) = \mathbb{E}[y_5 | y_1, \dots, y_4] \\ &= \mathbb{E}[\phi_1 y_4 + \phi_0 + \varepsilon_5 - \theta_1 \varepsilon_4 - \theta_3 \varepsilon_2 | y_1, \dots, y_4] \\ &= \phi_1 y_4 + \phi_0 + 0 - \theta_1 \hat{\varepsilon}_4 - \theta_3 \hat{\varepsilon}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\hat{y}_5 &= 0.5 \times 103 \\ &+ 50 \\ &+ 0 \\ &- (-0.2) \times (-4.3) \\ &- 0.1 \times 5 \end{aligned}$$

Puisque

$\hat{\varepsilon}_4$ et ε_2 sont connues
donc des constantes

(29)

$$\Rightarrow 4\hat{y}_5 \approx 100$$

Réponse C

CR

ARMA (1, 1)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\phi_1 = 0.3 \quad \text{et} \quad \theta_1 = 0.4$$

- Calculons $P_Y(2)$

D'après PDF Rappel ARMA (1, 1)

$$P_Y(k) = \phi_1 P_Y(k-1), \quad k > 1$$

$$\text{ou} \quad P_Y(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1)}$$

$$P_Y(1) = \frac{(0.3 - 0.4)(1 - 0.3(0.4))}{(1 + 0.4^2 - 2(0.3)(0.4))}$$

$$= \frac{-0.088}{0.92} = -0.095652173$$

$$P_Y(2) = 0.3 \left(\frac{-0.088}{0.92} \right) = -0.028695752$$

$$\approx -0.03$$

Réponse B

(30)