

SÉRIES CHRONOLOGIQUES, HIVER 2014, MAT8181

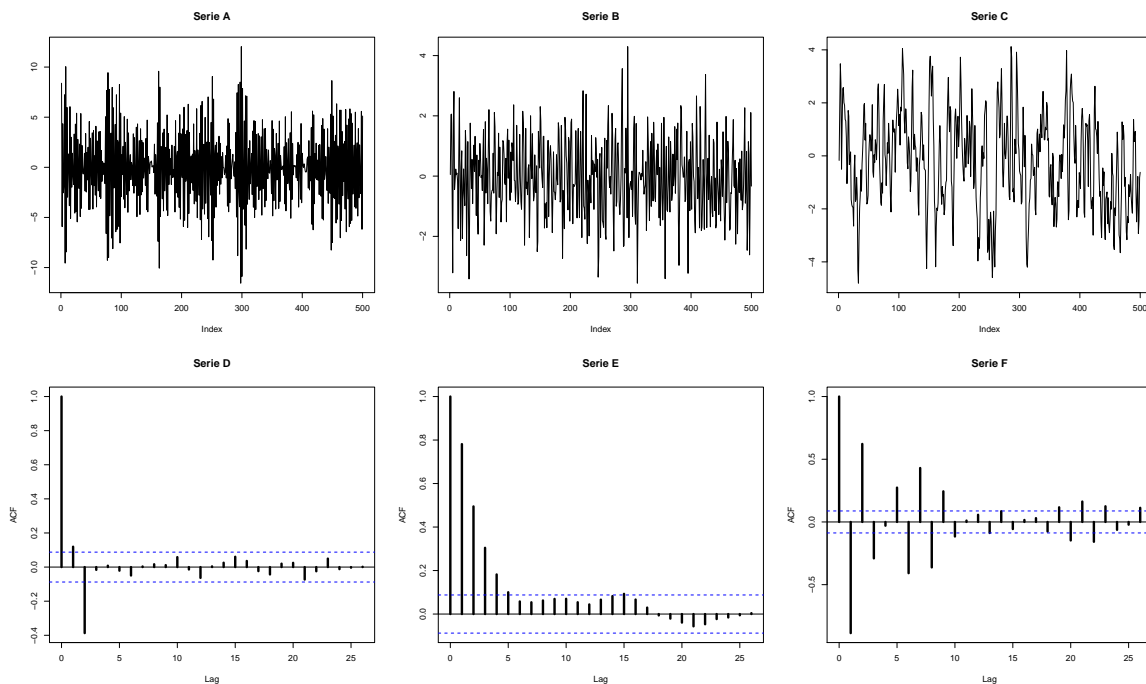
ARTHUR CHARPENTIER

EXAMEN FINAL (2 heures)

Exercice 1 Considérons les trois processus suivants,

$$\begin{cases} X_t = \varepsilon_t - 1.6X_{t-1} - 0.8X_{t-2} \\ Y_t = \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1} + 0.7Y_{t-1} \\ Z_t = \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2} \end{cases}$$

où (ε_t) est un bruit blanc de variance σ^2 . On a simulé trois trajectoires (A, B et C), et tracés trois fonctions d'autocorrélations (D, E et F). En détaillant un peu, expliquer quel processus se cache derrière chacune des figures.



Exercice 2

Soient (ε_t) et (η_t) deux bruits blancs, et $\theta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Montrer que les séries

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \text{ et } Y_t = \eta_t + \frac{1}{\theta}\eta_{t-1}$$

ont les mêmes fonctions d'autocorrélation.

Exercice 3 Soit (ε_t) un bruit blanc (faible) et (X_t) un processus stationnaire au second ordre, vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = -0.4 X_{t-1} + 0.12 X_{t-2} + \varepsilon_t.$$

(1) de quel modèle ARMA s'agit-il ?

(2) montrer que (ε_t) est l'innovation de (X_t) , et que la fonction d'autocovariance de (X_t) , notée $\rho(\cdot)$, vérifie une relation de récurrence de la forme

$$\rho(h) = a\rho(h-1) + b\rho(h-2), \text{ pour } h \geq 2,$$

où a et b sont des constantes à préciser.

(3) donnez la variance de (ε_t) pour que la variance de (X_t) soit unitaire.

(4) montrer que

$$\rho(h) = \frac{2}{11}[0.2]^h + \frac{9}{11}[-0.6]^h \text{ pour tout } h \geq 0.$$

Exercice 4

(1) Soit M la matrice 2×2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

avec $ac \neq bd$. Montrer qu'il existe N , matrice 2×2 telle que $N \times M$ soit une matrice diagonale.

(2) On considère deux séries temporelles

$$\begin{cases} X_t = \alpha X_{t-1} + \beta Y_{t-1} + u_t \\ Y_t = \delta Y_{t-1} + \gamma X_{t-1} + v_t \end{cases}$$

où les bruits blancs (u_t) et (v_t) sont (mutuellement) indépendants, au sens où $\mathbb{E}(u_t \cdot v_s) = 0$, pour tout s, t . Montrer que (X_t) et (Y_t) sont deux séries temporelles (univariées) ARMA(2,1), sous des conditions sur les 4 coefficients que l'on précisera.

Exercice 5

Soit (η_t) une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et $k \in \mathbb{N}_*$. On pose

$$\varepsilon_t = \eta_t \cdot \eta_{t-1} \cdots \eta_{t-k}.$$

(1) Montrer que (ε_t) est un bruit blanc faible, mais pas un bruit blanc fort.

(2) Montrer que (ε_t^2) suit un MA(k).