

COPULES ET VALEURS EXTRÊMES, HIVER 2014, MAT8595

ARTHUR CHARPENTIER

EXAMEN FINAL (2 heures)

L'épreuve dure 2 heures, les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Il y a un exercice, comprenant 7 questions, et 5 (courts) exercices indépendants les uns des autres.

Des réponses claires, précises et concises sont demandés. L'absence de clareté fera perdre des points. Les réponses doivent être portées dans le cahier.

Exercice 1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives, telles que

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}, \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les fonctions de répartition marginales de X et Y (notées F et G respectivement), ainsi que la copule associée.

Soit $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ un échantillon i.i.d. de loi H .

2. Donner la fonction de répartition de $M_n = \max\{X_i | i = 1, \dots, n\}$.
3. En choisissant convenablement des suites (a_n) et (b_n) , montrez que la limite

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \text{ peut être } \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)).$$

Donnez le max-domaine d'attraction pour les variables X_i .

3. Donner la fonction de répartition du couple

$$(\max\{X_i | i = 1, \dots, n\}, \max\{Y_i | i = 1, \dots, n\}).$$

En déduire la copule de ce vecteur aléatoire.

4. Calculer les indices de dépendance de queue pour cette copule, où, pour rappel

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u))$$

et

$$\lambda_U = \lim_{u \downarrow 0} \mathbb{P}(X > F^{-1}(1 - u) | Y > G^{-1}(1 - u))$$

Afin d'avoir un modèle plus flexible, on propose d'introduire un paramètre θ ,

$$H_\theta(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}}, \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que si $\theta \in [-1, 1]$, H_θ est une fonction de répartition.
6. Quelle(s) valeur(s) de θ correspond(ent) au cas indépendant ?
7. Donner les fonctions de répartition marginales de X et Y (notées F et G respectivement), ainsi que la copule associée.

Exercice 2 Soit (U, V) un vecteur Gaussien, centré, dont les variances sont $\text{var}(U) = a^2$ et $\text{var}(V) = b^2$, et de corrélation $r \in (-1, +1)$. On pose

$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \text{ et } Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}$$

Donnez la copule du couple (X, Y) .

Exercice 3 Expliquer en quelques lignes comment construire une copule asymétrique, et éventuellement donner son expression.

(pour rappel, C est symétrique si $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $0 \leq u, v, \leq 1$)

Exercice 4 Soit C une copule en dimension 2. C est-elle une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$? Si oui, le démontrer, et si non, donner un exemple de copule présentant une discontinuité.

Exercice 5 Pour quelles valeurs de α , la fonction $\phi(t) = \alpha(t^{-\alpha} - 1)$ est-elle le générateur d'une copule Archimédienne en dimension 2 ?

Exercice 6 Donner l'expression de la fonction de Kendall $K(t)$ dans le cas de la copule indépendante Π et des copules comonotone M et anticomonotone W .