

## EXERCICES, SÉRIES TEMPORELLES, HIVER 2014, MAT8181

ARTHUR CHARPENTIER

1 Soit  $(\varepsilon_t)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ . Dans les 6 cas suivants, la série  $(X_t)$  est-elle stationnaire, au sens faible ? (en discutant de conditions en fonction des valeurs des différentes constantes, éventuellement)

- si pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}$
- si pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$
- si pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = \varepsilon_t \cdot \cos[at] + \varepsilon_{t-1} \cdot \sin[at]$  avec  $a \in \mathbb{R}$
- si pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$
- si pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t = \sum_{i=0}^t a^i \cdot [\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}]$  avec  $a \in \mathbb{R}$

2 Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur Gaussien et posons  $X_0$  la variable aléatoire constante unitaire,  $X_0 = 1$ . Soit  $X$  une variable aléatoire de variance finie, telle que  $\gamma = [\text{cov}(X, X_i)]_{i=0,1,\dots,n}$  existe. On posera  $\Sigma = [\text{cov}(X_i, X_j)]_{i,j=0,1,\dots,n}$ . Soit  $\mathbf{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$  tel que

$$\text{EL}(X | \underbrace{X_0, \dots, X_n}_{\mathbf{X}}) = \mathbf{a}^{*\prime} \mathbf{X} = a_0^* + a_1^* X_1 + \dots + a_n^* X_n.$$

Montrer que  $\mathbf{a}^*$  est donné par  $\mathbf{a}^* = \Sigma^{-1} \gamma$ .

3 Soit  $(Y_t)$  une série stationnaire, et  $s_t$  une suite (déterministe) saisonnière de période  $d$  au sens où  $s_t = s_{t-d}$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ .

- On pose

$$X_t = a + bt + s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $Z_t = (1 - L)(1 - L^d)X_t$  est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de  $(Y_t)$ .

- On pose

$$X_t = [a + bt] \cdot s_t + Y_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $Z_t = (1 - L^d)^2 X_t$  est une série stationnaire, et donner sa fonction d'autocovariance en fonction de celle de  $(Y_t)$ .

4 Soit  $(X_t)$  une série temporelle telle que pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$X_t = \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (\star)$$

où  $(\varepsilon_t)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ . Montrer qu'il existe une suite réelle  $(a_n)$  telle que

$$Y_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varepsilon_{t-n}$$

vérifie la relation de récurrence de l'Equation  $(\star)$ . Montrer que  $(\varepsilon_t)$  n'est pas le processus d'innovation de  $(Y_t)$ .

5 Soit  $(X_t)$  une série temporelle définie par  $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ , avec  $|\theta| > 1$ , où  $(\varepsilon_t)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ . On définit

$$Y_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\theta^k} X_{t-k}.$$

Montrer que  $(Y_t)$  est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

6 Soit  $(X_t)$  une série temporelle stationnaire, définie par  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ , avec  $|\phi| > 1$ , où  $(\varepsilon_t)$  un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ . On définit

$$Y_t = X_t - \frac{1}{\phi} X_{t-1}$$

Montrer que  $(Y_t)$  est un bruit blanc dont on spécifiera la variance.

7 Considérons deux processus stationnaires,  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t \text{ et } Y_t = \phi_2 Y_{t-1} + \theta X_t + V_t$$

où  $(U_t)$  et  $(V_t)$  sont deux bruits blancs non corrélés, de variance  $\sigma_U^2$  et  $\sigma_V^2$  respectivement.

On suppose que  $\phi_1, \phi_2 \in (0, 1)$ .

- Posons  $Z_t = (1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)Y_t$ . Montrer que  $(Z_t)$  est stationnaire, et calculer sa fonction d'autocorrélation.
- Simuler un tel processus, avec  $\theta = 3/2$ ,  $\phi_1 = 3/5$   $\phi_2 = 2/5$  et avec les variances des bruits  $(3/5)^2$  et  $(2/5)^2$ , respectivement, pour 1000 valeurs, et tracer la fonction d'autocorrélation empirique.
- Montrer que  $(Y_t)$  est un processus *ARMA*