

ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #8

ARTHUR CHARPENTIER

- 1 Un contrat d'assurance paie un maximum de 1 et comprend un déductible de 1 (c'est-à-dire, perte de 0 à 1 elle ne rembourse rien, perte de 1 à 2 elle rembourse 1 de moins et perte de 2 à ∞ , elle rembourse 1). Trouver l'espérance du remboursement si la perte suit une exponentielle de moyenne 1.

A) $e^{-1} - 2e^{-2}$ B) $e^{-1} - e^{-2}$ C) $2(e^{-1} - e^{-2})$ D) e^{-1} E) $2e^{-2}$

- 2 La durée de vie d'une imprimante de 500\$ est de loi exponentielle avec moyenne 2 ans. Le manufacturier, qui a vendu 1 000 imprimantes, offre la garantie suivante : remboursement total s'il y a panne la 1^{ère} année ; la moitié du remboursement du prix d'achat s'il y a panne durant la seconde année ; rien dans les autres cas. Trouver l'espérance du montant du remboursement total pour les 1 000 imprimantes.

A) 158 025\$ B) 183 950\$ C) 196 725\$ D) 316 050\$ E) 256 400\$

- 3] Une ampoule électrique a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de moyenne 5 ans. Trouvez la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 10 ans sachant qu'elle fonctionne après 9 ans.

A) $1 - e^{-1/5}$ B) $e^{-1/5}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $e^{-9/10}$

- 4] Une actuaire vérifie une étude sur le montant de réclamations faites il y a dix ans. Selon l'étude, le montant suit une loi exponentielle telle que la probabilité qu'une réclamation soit moindre que 1 000\$ est 0.25. L'actuaire considère que depuis 10 ans, le montant des réclamations a doublé. Trouver la probabilité qu'aujourd'hui une réclamation soit de montant moindre que 1 000\$.

A) 0.063 B) 0.125 C) 0.134 D) 0.163 E) 0.250

- 5] Soit X une variable aléatoire exponentielle telle que $P(X \leq 2) = 2 \cdot P(X \geq 4)$. Trouver la variance de X .

A) $\frac{4}{(\ln 2)^2}$ B) $\frac{(\ln 2)^2}{4}$ C) $\frac{1}{(\ln 2)^2}$ D) $(\ln 2)^2$ E) $\ln 2$

- 6] La durée de vie d'un néon A (respectivement B) suit une loi exponentielle de moyenne 6 ans (respectivement 3 ans). Trouver la probabilité que le néon A dure moins de 3 ans et le néon B moins de 2 ans (ils sont indépendants).

A) $\frac{1}{18} (1 - e^{-\frac{1}{2}})$ B) $\frac{1}{18} e^{-\frac{7}{6}}$ C) $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}} + e^{-\frac{7}{6}}$
D) $e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{2}{3}}$ E) $1 - e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{2}{3}}$

7] Une oeuvre d'art est assurée contre le vol. Trouver x sachant que l'espérance de remboursement est 1000 et que le contrat rembourse : le montant x si le vol a lieu la première année, $x/2$ s'il a lieu la seconde ou troisième année, et rien s'il a lieu après trois ans. On suppose que le temps X avant un vol suit une loi exponentielle de moyenne 10 ans.

- A) 3 858 B) 4 449 C) 5 382 D) 5 644 E) 7 235

8] Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Si $P(X > 1) = P(X \leq 1)$ que vaut $E[X]$?

- A) $\frac{1}{e}$ B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{\ln 2}$ D) e E) 1

9] L'actuaire attend les deux rapports des inspecteurs indépendants avant de commencer son étude menant au remboursement des dommages d'un assuré. Si les temps (en années) pour faire leurs rapports suivent des lois exponentielles de moyenne 0.1 et 0.2 respectivement et le temps de l'étude de l'actuaire est aussi une exponentielle de moyenne $1/6$, combien de temps (en années) y aura-t-il avant le remboursement en moyenne ?

- A) 0.4 B) 0.5 C) 0.6 D) 0.8 E) 1

- 10 Il y a dix ans le montant X d'une réclamation suivait une loi exponentielle telle que $P(X < 1000) = 0.25$. À cause de l'inflation ce montant a depuis doublé.

Trouver la probabilité qu'une réclamation faite aujourd'hui soit de moins de 1000.

- A) 0.063 B) 0.125 C) 0.134 D) 0.163 E) 0.250

- 11 La durée de vie d'un néon A (respectivement B) suit une loi exponentielle de moyenne 5 ans (respectivement 2 ans). Trouver la probabilité que le néon A dure moins de 4 ans et le néon B plus de 3 ans. (On suppose l'indépendance)

- A) $1 - e^{-\frac{4}{5}}$ B) $e^{-\frac{23}{10}}$ C) $e^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{4}{5}}$ D) $e^{-\frac{4}{5}} \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right)$ E) $e^{-\frac{3}{2}} \left(1 - e^{-\frac{4}{5}}\right)$

- 12 La variable aléatoire X , montant d'une réclamation, se répartit selon la densité exponentielle. Trouver $\text{Var}[X]$ sachant que $P(X \leq 2) = 2P(X \geq 4)$.

- A) $\frac{2}{\ln 2}$ B) $\frac{8}{(\ln 2)^2}$ C) $\frac{(\ln 2)^2}{4}$ D) $\frac{2}{\ln \sqrt{2}}$ E) $\frac{4}{(\ln 2)^2}$

- 13 À Montréal, on suppose que les accidents (d'automobiles) se produisent aléatoirement et de manière indépendante. L'intervalle de temps entre les accidents suit une distribution exponentielle de moyenne 12 (minutes). Soit N le nombre d'accidents par heure.

Trouver $P(N = 10)$.

- A) $\frac{10e^{12}}{10!}$ B) $\frac{10e^{-12}e^{-10}}{10!}$ C) $\frac{5^{10}e^{-5}}{10!}$ D) $\frac{12^{10}e^{-10}}{10!}$ E) $\frac{12^{10}e^{-12}}{10!}$

- 14] Soit X , le temps entre l'inspection d'un certain moteur d'avion et le moment de la première panne du moteur. Supposons que X suive une loi exponentielle de moyenne 15 heures. Un avion à quatre moteurs entreprend un voyage de 20 heures après inspection de ses moteurs. Supposons que l'avion peut voler pourvu qu'au moins un de ses moteurs fonctionne. Quelle est la probabilité qu'il puisse terminer son vol ?

A) 0.500 B) 0.523 C) 0.706 D) 0.750 E) 0.831

- 15] L'actuaire attend le premier des trois rapports faits simultanément par des inspecteurs indépendants avant de commencer son étude menant au remboursement des dommages d'un assuré. Si les temps (en semaines) pour faire leurs rapports suivent des lois exponentielles de moyenne 2, 3, 4 respectivement et le temps de l'étude de l'actuaire est aussi une exponentielle de moyenne 5, combien de temps (en semaines) y aura-t-il en moyenne avant le remboursement ?

A) 7 B) 8 C) $\frac{77}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) 14

- 16] Si le temps que prend un étudiant du cours ACT2121 pour compléter un devoir suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures 45 minutes, trouver la probabilité que dans une classe de 25 élèves au moins un complète le devoir en moins d'une heure.

A) 98.7% B) 75.2% C) 36.7% D) 21.4% E) 11.3%

17] Pour cinq assurés indépendants le temps aléatoire (en années) jusqu'à leur première réclamation suit toujours une loi exponentielle de variance 100. Trouver l'espérance du moment de la première réclamation d'un des cinq assurés.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 50 E) 4

18] On estime que le temps avant le prochain ouragan majeur en Floride suit une loi exponentielle. De plus, selon l'expert, il y a 50% plus de chance qu'un ouragan majeur arrive d'ici 10 ans qu'il n'y a de chance qu'il arrive d'ici 5 ans. Trouver l'espérance du temps d'ici le prochain ouragan majeur.

- A) 3.466 B) 5.000 C) 6.931 D) 7.213 E) 14.429

19] La ville de Rockforest est desservie par trois compagnies de taxis : les taxis Yellow, les taxis SOS et les taxis Rocky. À chaque heure sur la rue Principale, il passe en moyenne 12, 8, 10, taxis Yellow, SOS et Rocky respectivement, dont 50% sont libres. Vous attendez sur la rue Principale et voulez prendre le prochain taxi libre qui passera. Si les temps d'attente suivent des lois exponentielles, à combien de minutes vous attendez-vous à avoir à attendre ?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

20] Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle avec moyenne 1. Trouver la valeur maximum de $P(x \leq X \leq 2x)$ pour $x \geq 0$.

- A) 1 B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{\ln 2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

- 21] Mohamed est le treizième dans une file qui attend devant deux cabines téléphoniques occupées. La durée (en minutes) d'un appel téléphonique dans ces cabines suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$ (et moyenne 3).

Trouver l'espérance du temps d'attente de Mohamed avant d'avoir accès à une cabine vide.

- A) 18 B) $\frac{33}{2}$ C) 33 D) $\frac{39}{2}$ E) 39

- 22] Une secrétaire novice prend en moyenne une heure pour taper une lettre. En supposant que le temps pour taper une lettre est de loi exponentielle, trouver la probabilité que durant sa journée de travail de huit heures, la secrétaire réussisse à taper au moins les 12 lettres que sa patronne lui a données.

- A) 11% B) 21% C) 31% D) 41% E) 51%

- 23] Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.

Trouver $E[\max(X, Y)]$.

- A) $\frac{1}{\lambda + \mu}$ B) $\frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}$ C) $\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ D) $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ E) $\max(\lambda, \mu)$

24] En analysant le temps d'attente X avant un certain événement catastrophique un actuaire établit que X est de loi exponentielle de moyenne μ . Si un assureur a n différentes polices d'assurance pour n tels événements catastrophiques indépendants, combien de temps en moyenne doit-il espérer attendre avant une première réclamation ?

- A) $n\mu$ B) μ/n C) μ^n D) $\sqrt[n]{\mu}$ E) n/μ

25] Une compagnie d'assurance automobile vend 45% de ses polices à des femmes et 55% à des hommes. Le temps écoulé entre le moment de l'achat et le moment de la première réclamation suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans pour les femmes et 3 ans pour les hommes. À tant donné qu'un assuré a fait une réclamation durant la première année, trouver la probabilité que ce soit une femme.

- A) 48% B) 45% C) 42% D) 40% E) 39%

26] Une ampoule électrique a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de moyenne 5 ans. Trouvez la probabilité que l'ampoule fonctionnera encore après 10 ans sachant qu'elle fonctionnait après 8 ans.

- A) $1 - e^{-2/5}$ B) $e^{-2/5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $e^{-4/5}$

- 27] Soit X , le temps entre l'inspection d'un certain moteur d'avion et le moment de la première panne du moteur. Supposons que X suive une loi exponentielle de moyenne 15 heures. Un avion à deux moteurs entreprend un voyage de 3 heures après inspection de ses moteurs. Supposons que l'avion ne peut voler que si ses deux moteurs fonctionnent. Quelle est la probabilité qu'il puisse terminer son vol? On suppose l'indépendance entre les deux moteurs.

A) 0.500 B) 0.523 C) 0.670 D) 0.750 E) 0.831

- 28] Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$ et $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Si $Y = X^2 - 1$ alors que vaut $F_Y(3)$?

A) $\frac{1}{3} e^{-3}$ B) $\frac{1}{4} e^{-2}$ C) $1 - 2 e^{-2}$ D) $1 - e^{-2}$ E) $1 - e^{-3}$

- 29] La perte X est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} (0.002)e^{-(0.002)x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si, à cause de l'inflation, la perte a subi une augmentation de 25% pour devenir Y , trouver la fonction de densité de Y .

A) $(0.0025)e^{-(0.0025)y}$ B) $(0.0016)e^{-(0.0016)y}$ C) $(0.02)e^{-(0.02)y}$
D) $(0.004)e^{-(0.004)y}$ E) $(1.25)e^{-(1.25)y}$

30 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle. Si $P(X > 1) = \frac{4}{5}$, trouver la fonction de répartition, $F_X(x)$, de X .

- A) $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ B) $\frac{4}{5} e^{-\frac{4x}{5}}$ C) $1 - e^{\frac{4x}{5}}$ D) $e^{-\frac{4x}{5}}$ E) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x$

31 Si le temps aléatoire que prend un étudiant du cours ACT4020 pour compléter un devoir suit une loi exponentielle de moyenne 5 heures, trouver la probabilité que dans une classe de 40 élèves au moins un complète le devoir en plus de 15 heures.

- A) 13% B) 25% C) 48% D) 75% E) 87%

32 Une compagnie d'assurance automobile vend 45% de ses polices à des femmes et 55% à des hommes. Le temps écoulé entre le moment de l'achat et le moment de la première réclamation suit une loi exponentielle de moyenne 4 ans pour les femmes et 3 ans pour les hommes. À tant donné qu'un assuré n'a pas fait de réclamation durant la première année, trouver la probabilité que ce soit une femme.

- A) 0.44 B) 0.45 C) 0.46 D) 0.47 E) 0.48