

ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #7

ARTHUR CHARPENTIER

1 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver  $P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4})$

- A) 0.0521      B) 0.1563      C) 0.3125      D) 0.5000      E) 0.8000

2 Soit  $X_1, X_2$  et  $X_3$  trois variables aléatoires continues indépendantes de même

fonction de densité  $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Si  $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$  alors trouver  $P(Y > 1/2)$ .

- A)  $\frac{1}{64}$       B)  $\frac{37}{64}$       C)  $\frac{343}{512}$       D)  $\frac{7}{8}$       E)  $\frac{511}{512}$

- 3 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$  par  $0 < x < \theta$  et  $f_X(x) = 0$  autrement. Si  $P(X > 1) = \frac{7}{8}$ , trouver la valeur de  $\theta$ .

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\left(\frac{7}{8}\right)^{1/3}$       C)  $\left(\frac{8}{7}\right)^{1/3}$       D)  $2^{1/3}$       E) 2

- 4 Soit  $f_X(x) = xe^{-x^2/2}$  pour  $x > 0$  la fonction de densité de  $X$  et  $Y = \ln X$ . Trouver la fonction de densité de  $Y$ .

A)  $e^{2y - \frac{1}{2}e^{2y}}$       B)  $(\ln y)e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$       C)  $e^{y - \frac{1}{2}e^{2y}}$       D)  $ye^{-y^2/2}$       E)  $e^{-\frac{1}{2}e^{2y}}$

- 5 Supposons que  $X$  est une variable aléatoire continue de distribution uniforme sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . Calculer  $P(X(X+1) < 2)$ .

A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{3}{4}$       D)  $\frac{1}{3}$       E)  $\frac{2}{3}$

- 6 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = 3x^2$ , pour  $0 < x < 1$ . Trouver  $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right)$ .

A) 0.297      B) 0.250      C) 0.125      D) 0.375      E) 0.500

- 7 On pige au hasard cinq nombres réels indépendamment selon la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 3]$ . Trouver la probabilité que le minimum des 5 nombres soit plus petit que 1.

A) 0.329      B)  $\frac{1}{15}$       C) 0.87      D) 0.004      E)  $\frac{1}{3}$

- 8 Soit  $X$  une variable aléatoire continue et  $Y = e^{3X}$ .

Sachant que  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , trouver  $f_Y(y)$ ,  $1 \leq y \leq e^3$ .

A)  $\frac{(\ln y)^2}{3}$       B)  $\frac{(\ln y)^2}{9y}$       C)  $\frac{\ln y}{y}$       D)  $3y^2$       E)  $(\ln y)^2$

- 9 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = (2x)^{-1}$  pour  $e^{-1} < x < e$ . Si deux observations indépendantes de  $X$  sont faites, trouver la probabilité que l'une soit moins de 1 et l'autre plus de 1.

A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{4}$       C)  $\frac{1}{3}$       D) 1      E)  $\frac{3}{4}$

- 10 Soit  $X$  une variable aléatoire continue telle que  $f_X(x) = 3 - 48x^2$  pour  $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ . Calculer  $P\left(\frac{1}{8} \leq X \leq \frac{5}{16}\right)$ .

A)  $\frac{3}{32}$       B)  $\frac{125}{256}$       C)  $\frac{1}{16}$       D)  $\frac{27}{256}$       E)  $\frac{5}{32}$

- 11 Soit  $X$  une variable aléatoire continue telle que  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & \text{pour } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Trouver  $f_Y(y)$  pour  $Y = 8 - X^3$ ,  $0 < y < 8$ .

- A)  $\frac{1}{3}(8 - y)^{-2/3}$       B)  $\frac{1}{4}(8 - y)^{1/3}$       C)  $\frac{1}{6}(8 - y)^{1/3}$   
 D)  $\frac{1}{4}(8 - y)$       E)  $\frac{(8 - y)^{1/3}}{12}$

- 12 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = 3x^2$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Sachant que  $Y = -X^3$ , trouver  $f_Y(y)$  sur l'intervalle  $[-1, 0]$ .

- A)  $-3y^{2/3}$       B)  $\frac{2}{3} \ln y$       C)  $\frac{2}{3}y^{2/3}$       D) 1      E)  $3y^{2/3}$

- 13 La fonction de densité  $X$  du montant d'une réclamation est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pour } x > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons qu'il y ait trois réclamations indépendantes. Trouver l'espérance de la plus grande des trois.

- A) 4.50      B) 3.375      C) 2.232      D) 2.70      E) 2.025

- [14] Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires continues indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 10]$ . Trouver la probabilité suivante :

$$P\left(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 3 \text{ ou } \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 7\right)$$

A)  $\left(\frac{3}{10}\right)^n - \left(\frac{7}{10}\right)^n$     B)  $\left(\frac{2}{5}\right)^n$     C)  $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$     D)  $4 \cdot \frac{1}{10^n}$     E)  $\frac{n}{4^n}$

- [15] Soit  $X, Y, Z$  trois variables aléatoires indépendantes de même fonction de densité  $f_X(x) = 3x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Trouver la probabilité  $P(\max(X, Y, Z) > 0.5)$ .

A)  $\frac{1}{64}$     B)  $\frac{37}{64}$     C)  $\frac{343}{512}$     D)  $\frac{7}{8}$     E)  $\frac{511}{512}$

- [16] Soit  $X$  la variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = 3x^2$  pour  $0 \leq x \leq 1$ . Trouver  $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3} \mid X \geq \frac{1}{4}\right)$ .

A) 21.00%    B) 24.59%    C) 26.34%    D) 28.66%    E) 30.92%

- [17] Le profit annuel d'une compagnie I est modélisé par une variable aléatoire continue  $X > 0$  de fonction de densité  $f_X(x)$ . Le profit de la compagnie II est de 20% supérieur. Trouver la fonction de densité du profit  $Y$  de la compagnie II.

A)  $f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$     B)  $\frac{5}{6}f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$     C)  $\frac{6}{5}f_X\left(\frac{6}{5}y\right)$     D)  $f_X\left(\frac{6}{5}y\right)$     E)  $\frac{6}{5}f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$

- 18 Un appareil est formé de sept composants dont les durées de vie (indépendantes) sont des variables aléatoires de même loi  $X$  telle que

$$f_X(x) = \frac{3}{x^4} \text{ pour } x > 1$$

Trouver l'espérance de durée de vie de l'appareil sachant qu'il tombe en panne dès que l'un de ses composants tombe en panne.

- A) 1.02      B) 1.03      C) 1.04      D) 1.05      E) 1.06

- 19 On prend un point au hasard uniformément sur l'intervalle  $[0, 1]$ ; soit  $X$  sa valeur.

Trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire :

$$Y = -2 \ln(1 - X).$$

- A)  $2e^{-2y}$       B)  $\frac{1}{2}$       C)  $\frac{1}{2}e^{-y/2}$       D)  $1 - e^{-2y}$       E)  $4ye^{-2y}$

- 20 Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Trouver  $P(0 < e^X \leq 4)$ .

- A)  $e^{-4}$       B)  $\frac{3}{4}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{1}{4}$       E)  $1 - e^{-4}$

- [21] Soit  $X_1, X_2, X_3$  trois observations indépendantes de la variable aléatoire continue  $X$  ayant la fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & \text{pour } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois observations soient supérieures à 1.

- A)  $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$                       B)  $3 - 2\sqrt{2}$                       C)  $3(\sqrt{2} - 1) \cdot (2 - \sqrt{2})^2$   
 D)  $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$                       E)  $3\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

- [22] Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux observations indépendantes d'une distribution uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Soit  $Y = \min(X_1, X_2)$ . Trouver fonction de densité de  $Y$ .

- A) 1      B)  $2y$       C)  $2(1 - y)$       D)  $1 - y$       E)  $2y(1 - y)$

- [23] Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = e^{-x}$  pour  $x > 0$ . Trouver la fonction de densité de  $Y = e^X$ .

- A)  $ye^{-y}$       B)  $e^{-e^y}$       C)  $e^{-y}$       D)  $\frac{1}{y}$       E)  $\frac{1}{y^2}$

- 24 Les montants des pertes sont des variables aléatoires continues et indépendantes ayant la même fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 10/x^2 & \text{pour } x > 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité que la plus grande de trois pertes choisies au hasard soit plus petite que 25.

- A) 0.216      B) 0.400      C) 0.600      D) 0.500      E) 0.784

- 25 Soit  $Y = e^{-X}$  où  $f_X(x) = 2e^{-2x}$  pour  $x > 0$ . Trouver  $f_Y(y)$ .

- A)  $y$       B)  $2y^2$       C)  $y^2$       D)  $\frac{1}{2}y^2$       E)  $2y$

- 26 Selon le modèle utilisé, la valeur accumulée d'un investissement de 2 500 est une variable aléatoire  $Y = 2\,500e^{2X}$ , où  $X$  a une répartition continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} Ce^{-x} & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $C$  est une constante. Déterminer la fonction de densité  $f_Y(y)$  de la variable aléatoire  $Y$  dans la région où elle est positive.

- A)  $\frac{C}{2y}$       B)  $\frac{25(e-1)}{ey}$       C)  $\frac{25e}{(e-1)y^{3/2}}$       D)  $Ce^{-y}$       E)  $50\sqrt{y}$



27] Soit  $p_n$  la probabilité que le minimum de  $n$  nombres (tous choisis uniformément et indépendamment au hasard sur l'intervalle  $[0, 1]$ ) soit supérieur à  $\frac{1}{n}$ . Que vaut  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  ?

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{e}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{2}{e}$       E)  $\frac{2}{3}$

28] Une compagnie assure un grand nombre de maisons. La valeur assurée  $X$  d'une maison prise au hasard suit une distribution de fonction de densité  $f_X(x) = 3x^{-4}$  pour  $x > 1$  et 0 sinon. Sachant qu'une maison est assurée pour plus de  $\frac{3}{2}$ , trouver la probabilité qu'elle soit assurée pour moins de 2.

- A)  $\frac{37}{64}$       B)  $\frac{35}{64}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{7}{16}$       E)  $\frac{5}{16}$

29] Une compagnie installe deux machines identiques au même moment. Les périodes de temps avant que ces machines ne tombent en panne sont indépendantes et chacune est répartie uniformément sur l'intervalle de 5 à 20 ans. Calculer la probabilité que les deux machines tombent en panne en deçà d'un an l'une de l'autre.

- A) 12.9%      B) 13.9%      C) 14.9%      D) 15.9%      E) 16.9%

30 Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de distribution est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1 - 9x^{-2} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Soit  $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_5)$ , où  $X_1, X_2, \dots, X_5$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que  $X$ . Trouver  $E[Y]$ .

- A) 6      B) 4      C)  $\frac{20}{3}$       D) 5      E)  $\frac{10}{3}$

31 Le logarithme naturel de la variable aléatoire  $X$  est uniformément distribué sur l'intervalle  $[-2, 2]$ . Sachant que  $X > 1$ , calculer la probabilité que  $X \leq 2$ .

- A) 0.347      B) 0.452      C) 0.244      D) 0.628      E) 0.512

32 Dix laveuses à linge sont installées dans la salle de lavage d'un bloc-appartements. Les durées de vie future  $X$  des appareils sont indépendantes et toutes de loi de Pareto avec fonction de densité :

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} \text{ pour } x > 0 \text{ (en années).}$$

Trouver la probabilité que pas plus de deux appareils doivent être remplacés durant la première année si on estime que  $\alpha = 1$  et  $\theta = 5$ .

- A) 0.565      B) 0.775      C) 0.435      D) 0.685      E) 0.600

33] Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de densité  $f_X(x) = ax$  pour  $0 \leq x \leq \sqrt{2/a}$ , où  $a > 0$ . Si  $Var[X] = 1$  alors que vaut  $a$  ?

- A) 1      B) 1/3      C) 1/9      D) 1      E) 9

34] La durée de vie en années d'une tondeuse à gazon est uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T$  vaut 8, 10 ou 15 avec les probabilités 0.2, 0.4 et 0.4 respectivement. Trouver la probabilité que la tondeuse va encore fonctionner dans 9 ans.

- A) 0.5      B) 0.4      C) 0.3      D) 0.2      E) 0.1

35] Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux lois uniformes et indépendantes sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

Trouver  $P(\max(X_1, X_2) \geq \frac{4}{3})$ .

- A)  $\frac{3}{4}$       B)  $\frac{9}{16}$       C)  $\frac{2}{3}$       D)  $\frac{5}{9}$       E)  $\frac{4}{9}$

36] Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est :

$F_X(x) = 1 - \sum_{i=0}^5 \frac{x^i e^{-x}}{i!}$  pour  $x > 0$ . Trouver la fonction de densité  $f_X(x)$ .

- A)  $\frac{x^5 e^{-x}}{120} - e^{-x}$       B)  $\frac{x^5 e^{-x}}{120}$       C)  $e^{-x}$       D)  $x^5 e^{-x}$       E)  $x e^{-5x}$

- 37 Une compagnie assure un grand nombre de maisons. La valeur assurée  $X$  d'une maison prise au hasard suit une distribution de fonction de densité  $f_X(x) = 3x^{-4}$  pour  $x > 1$ . Sachant qu'une maison est assurée pour plus de 2, trouver la probabilité qu'elle soit assurée pour moins de 4.

A)  $\frac{37}{64}$     B)  $\frac{35}{64}$     C)  $\frac{1}{2}$     D)  $\frac{7}{8}$     E)  $\frac{5}{16}$

- 38 Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires uniformes et indépendantes sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Soit  $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Trouver  $P(Y < \frac{1}{2} < Z)$ .

A)  $1 - \frac{1}{2^n}$     B)  $\frac{3}{8^n}$     C)  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$     D)  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$     E)  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- 39 Soit  $X$  une variable aléatoire continue, à valeur dans l'intervalle  $[1, \infty[$ , telle que pour tout  $u \geq 1$  et  $v \geq 1$ , on a  $F_X(u) - F_X(v) = v^{-3} - u^{-3}$ . Que faut  $f_X(2)/F_X(2)$ ?

A)  $\frac{3}{32}$     B)  $\frac{3}{14}$     C)  $\frac{3}{8}$     D)  $\frac{3}{2}$     E)  $\frac{2}{3}$

- 40 On estime que la durée de vie (en années) du chien Fido est une variable aléatoire continue  $X$  de fonction de répartition (ou cumulative) :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ 1 - \frac{25}{x^2} & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

Trouver la probabilité que Fido vive entre 12 et 15 ans.

- A) 17.36%      B) 14.87%      C) 11.11%      D) 8.25%      E) 6.25%

- 41 Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition (ou cumulative) est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{-(x-a)^2/2} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Trouver le 75<sup>e</sup> percentile de  $X$ .

- A)  $F_X(0.75)$       B)  $a - \sqrt{2\ln(4/3)}$       C)  $a + \sqrt{2\ln(4/3)}$       D)  $a - 2\sqrt{\ln 2}$       E)  $a + 2\sqrt{\ln 2}$

- 42 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x) = (2x)^{-1}$  pour  $e^{-1} < x < e$ . Si trois observations indépendantes de  $X$  sont faites, trouver la probabilité que l'une soit moins de 1 et que les deux autres soient plus de 1.

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{3}{8}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $\frac{1}{4}$       E)  $\frac{3}{4}$

43 Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition est :

$$F_X(x) = 1 - \sum_{i=0}^6 \frac{x^i e^{-x}}{i!} \text{ pour } x > 0. \text{ Trouver la fonction de densité } f_X(x).$$

- A)  $\frac{x^6 e^{-x}}{720} - e^{-x}$       B)  $\frac{x^6 e^{-x}}{720}$       C)  $e^{-x}$       D)  $x^6 e^{-x}$       E)  $x e^{-6x}$

44 Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{pour } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Trouver } P(|X - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4})$$

- A) 0.9479      B) 0.8437      C) 0.6875      D) 0.5000      E) 0.2000

45 Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la fonction de répartition (ou cumulative) est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Trouver le 75<sup>e</sup> percentile de  $X$ .

- A) 1.665      B) 0.833      C) 1.386      D) 0.693      E) 0.346