

ACTUARIAT 1, ACT 2121, AUTOMNE 2013 #13

ARTHUR CHARPENTIER

1 Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable aléatoire $Y|X = x$, $0 < x < 1$.

A) $\frac{1}{1-x}$ B) $2(1-x)$ C) 2 D) $\frac{1}{y}$ E) $\frac{1}{1-y}$

2 Soit X et Y les prix aléatoires de deux actions boursières. Supposons X uniforme sur l'intervalle $[0, 12]$ et $Y|X = x$ uniforme sur l'intervalle $[0, x]$. Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$.

A) 0 B) 4 C) 6 D) 12 E) 24

- 3] Soit L et H les nombres (aléatoires) de pannes d'électricité majeures annuellement dans les villes de Longueuil et St-Hubert respectivement. Les probabilités des différents couples (L, H) sont données dans le tableau suivant :

		H			
		0	1	2	3
L	0	0.12	0.06	0.05	0.02
	1	0.13	0.15	0.12	0.03
	2	0.05	0.15	0.10	0.02

Calculer la variance du nombre de pannes à St-Hubert sachant qu'il n'y a pas eu de panne à Longueuil (c'est-à-dire $\text{Var}(H|L = 0)$).

- A) 0.51 B) 0.84 C) 0.88 D) 0.99 E) 1.76
- 4] Soit X uniformément distribué sur l'intervalle $[1, 3]$. Calculer la probabilité que deux observations indépendantes x_1 et x_2 de X aient une somme supérieure à 5.

- A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{8}$

- 5] Les réclamations d'assurance X et Y d'un homme et son épouse en million de dollars suivent une loi conjointe de densité $f_{X,Y}(x, y) = kx^2y$ pour $0 < x^2 < y < 1$. Trouver la probabilité que l'homme réclame moins de 500 000\$ sachant que la femme a réclamé 500 000\$ exactement.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{4}{\sqrt{8}}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{1}{8}$

6] Soit X, Y deux variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = 9x^2y^2 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1.$$

Trouver $P\left(X \leq \frac{1}{2} \text{ ou } Y \leq \frac{1}{2}\right)$.

- A) $\left(\frac{7}{8}\right)^2$ B) $\frac{15}{64}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{64}$ E) $\frac{3}{4}$

7] Pour les variables aléatoires du problème précédant , trouver $\text{Cov}(X, Y)$.

- A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{-9}{16}$ C) 1 D) -1 E) 0

8] Pour les variables aléatoires du problème précédant , trouver $P(X \leq Y)$.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

9] Soit $0 \leq X \leq 3$ et $0 \leq Y \leq 5$ deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme. Trouver la probabilité que $X + Y \geq 3$.

- A) 0.5 B) 0.3 C) 0.6 D) 0.7 E) 0.4

- [10] Soit X et Y des variables aléatoires représentant des pertes possibles. Si la fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, trouver la probabilité que la perte totale $X + Y$ soit inférieure à 1.

A) $1 - \frac{1}{e}$ B) $\frac{1}{e}$ C) $\frac{1}{e^2}$ D) $1 - \frac{2}{e}$ E) $1 - \frac{2}{e^2}$

- [11] Un couple aléatoire (X, Y) est choisi avec distribution uniforme dans le rectangle $0 \leq X \leq 2$, $0 \leq Y \leq 3$. Trouver $P(X + Y \geq 2)$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

- [12] Un couple aléatoire (X, Y) est choisi avec distribution uniforme dans le triangle $0 \leq x \leq y \leq 1$. Trouver $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{16}$

- [13] Une police d'assurance couvre des pertes X et Y qui sont des variables aléatoires continues fonction de densité conjointes $f_{X,Y}(x,y) = 2x$, pour $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Trouver l'espérance du remboursement s'il est de $X + Y$ avec un déductible de 1.

A) $1/4$ B) $1/3$ C) $1/2$ D) $7/12$ E) $5/6$

- 14] Deux personnes se donnent rendez-vous dans un restaurant entre 18h et 20h. Si les deux arrivent aléatoirement entre 18h et 20h de façons indépendantes et uniformément distribuées, trouver la probabilité que la première personne à arriver attende plus de 30 minutes avant l'arrivée de la seconde personne.

A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{3}{4}$

- 15] Les coûts X et Y de deux objets sont aléatoires avec fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } x < y < x + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la variance conditionnelle de Y sachant que $X = \frac{1}{2}$.

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{7}{6}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

- 16] La fonction de densité conjointe de X et Y est :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2(1-y) & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Cov}(X, Y)$.

A) 1 B) -1 C) k D) k^2 E) 0

- 17 Soit $F_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{5}(3x^2y + 2x^2y^2)$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, la fonction cumulative (ou de distribution, ou de répartition) des variables continues X et Y , c'est-à-dire $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ et } Y \leq y)$.

Trouver $f_{X,Y}(0.5, 0.5)$ où $f_{X,Y}(x, y)$ est la fonction de densité conjointe de X, Y .

- A) 0.15 B) 0.25 C) 0.75 D) 1 E) 1.25

- 18 Soit X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes de fonctions de densité $f_X(x) = 1$ pour $0 < x < 1$ et $f_Y(y) = 2y$ pour $0 < y < 1$. Trouver $P(Y < X)$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

- 19 Soit $f_{X,Y}(x, y) = \frac{5}{16}xy^2$ pour $0 < x < y < 2$ la fonction de densité conjointe de X et Y . Trouver la fonction de densité marginale $f_X(x)$.

- A) $\frac{2x}{y^2}$ B) $\frac{5xy^3}{48}$ C) $\frac{5y^4}{32}$ D) $\frac{5x^4}{48}$ E) $\frac{5x}{6} - \frac{5x^4}{48}$

- 20 Pour une assurance contre les tempêtes soient X la perte sur les bâtiments et Y la perte totale sur les bâtiments et le terrain. On suppose que la fonction de densité conjointe est $f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+y)}$, $0 < x < y < \infty$ (et 0 autrement). Trouver $E[Y|X = x]$ pour $x > 0$.

- A) 1 B) $x + 1$ C) $\frac{1 - xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$ D) x E) $(x + 1)e^{-x}$

21] Soit X et Y les pertes pour une assurance. Supposons que $f_{X,Y}(x,y) = x/500\,000$ pour $0 < x < 100$ et $0 < y < 100$. Si la police d'assurance rembourse le total des deux pertes jusqu'à un maximum de 100, quelle sera l'espérance du remboursement (arrondie à l'entier le plus près).

- A) 90 B) 92 C) 94 D) 96 E) 98

22] Soit X et Y des pertes aléatoires indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0, 10]$. Une police d'assurance rembourse $X + Y$. Calculer la probabilité que le remboursement soit inférieur à 11.

- A) 40.5% B) 45% C) 55% D) 59.5% E) 65%

23] Soit X et Y des variables aléatoires continues avec fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1.$$

Calculer $P(2X < 1 \mid X + Y \leq 1)$.

- A) $\frac{11}{48}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{11}{16}$ E) $\frac{3}{4}$

- 24] La fonction de densité conjointe des deux variables aléatoires X, Y continues sur l'intervalle $[0, 1]$ est :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8x^3(1 - y) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Cov}(X, Y)$.

- A) $-\frac{1}{8}$ B) 0 C) $\frac{1}{8}$ D) 2 E) 1

- 25] Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ne prenant que les valeurs -1 ou $+1$. Si $P(X = -1, Y = -1) = 0.8, P(X = -1, Y = 1) = 0.05, P(X = 1, Y = -1) = 0.025$ et $P(X = 1, Y = 1) = 0.125$, alors calculer $\text{Var}[Y|X = 1]$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{9}$

- 26] Lors d'un accident d'auto soit X la perte matérielle et Y la perte pour blessures. On suppose que la fonction de densité conjointe est constante et définie pour $0 \leq X \leq 10$ et $0 \leq Y \leq 15$. Trouver la probabilité que la perte totale $X + Y$ soit entre 5 et 20.

- A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{2}{3}$

- [27] Soit X les dommages sur l'auto du client et Y les dommages sur les autres véhicules lorsqu'il y a un accident. On suppose $f_X(x) = \frac{1}{10}$, $0 < x < 10$ et $f_{Y|X}(y|X = x) = \frac{1}{2}$ pour $x < y < x + 2$. Trouver la probabilité que $Y > 6$.

A) 0.05 B) 0.08 C) 0.10 D) 0.25 E) 0.50

- [28] Pour une assurance, la perte X (en milliers de \$) suit une loi de fonction de densité $f_X(x) = \frac{x^2}{9}$ pour $0 \leq x \leq 3$. Si le temps (en heures) pour traiter la réclamation pour une perte $0 \leq x \leq 3$ est uniformément distribué entre x et $3x$, calculer la probabilité que le temps pour traiter une réclamation (prise au hasard) soit plus de 5 heures.

A) 0.418 B) 0.397 C) 0.379 D) 0.245 E) 0.222

- [29] On prend un point X au hasard uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit x le résultat. On prend ensuite un point Y uniformément au hasard dans l'intervalle $[0, x]$ et on note le résultat y où $0 \leq y \leq x$. Donc, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ pour $y \in [0, x]$. Trouver la densité de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire X étant donné $Y = y$.

A) $\frac{x-1}{\ln y}$ B) $\frac{-1}{x \ln y}$ C) $\frac{-\ln y}{x}$ D) $\ln y$ E) 1

- [30] Une police d'assurance avec un déductible de 1 couvre les pertes X et Y où X, Y sont de loi conjointe $f_{X,Y}(x, y) = 6e^{-2x-3y}$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

Trouver la probabilité que chacune des deux pertes dépasse le déductible.

A) e^{-5} B) e^{-4} C) e^{-3} D) e^{-2} E) e^{-1}

- [31] Si $f_{X,Y}(x, y) = k(x + y)^2$ est la fonction de densité conjointe pour les variables aléatoires continues $0 \leq X \leq 1$ et $0 \leq Y \leq 1$ alors k est :

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{6}{7}$

- [32] Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2 - x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver $P(X > 1)$.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

- [33] Supposons que les nombres aléatoires d'accidents durant l'année à venir pour un couple sont $X = 0, 1$ ou 2 pour la femme et $Y = 1$ ou 2 pour l'homme. Si la distribution conjointe est $p(x, y) = \frac{x+y}{15}$ pour $x = 0, 1, 2$ et $y = 1, 2$, trouver l'espérance du nombre d'accidents de la femme sachant que l'homme a eu deux accidents.

A) $\frac{19}{15}$ B) $\frac{11}{15}$ C) $\frac{11}{9}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

- [34] Soit la fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{pour } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Calculer $P\left(X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{7}{12}$ D) 8 E) $\frac{3}{8}$

35] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)}$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Trouver $f_{Y|X}(y|x)$.

- A) xe^{-xy} B) $(y+1)^2xe^{-x(y+1)}$ C) $(y+1)^{-2}$ D) $ye^{-y(y+1)}$ E) $xe^{-x(y+1)}$

36] Soit X et Y des variables aléatoires de loi conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(X < 2Y)$.

- A) $\frac{7}{32}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{19}{24}$

37] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = 4x$ pour $0 < x < \sqrt{y} < 1$. Trouver la fonction de densité de la marginale Y .

- A) $2y$ B) $2y^2$ C) y^2 D) \sqrt{y} E) $4\sqrt{y}$

38] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance conditionnelle $E[Y | X = 1/3]$.

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{3}{5}$

- 39] X et Y sont des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } x^2 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable marginale Y .

- A) $15y^{3/2}(1 - y^{1/2})$ B) $15y(y - \sqrt{y})$ C) $15(y - y^2)$ D) $\frac{15}{2}(y - y^2)$ E) $15y$

- 40] X représente l'âge d'une automobile assurée qui a été impliquée dans un accident et Y représente le montant du sinistre encouru lors de l'accident. X et Y ont la fonction de densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (x + y)/1000 & \text{pour } 0 \leq x \leq 10 \text{ et } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité que $Y < 2X$.

- A) 89% B) 79% C) 69% D) 59% E) 49%

- 41] X et Y sont des variables aléatoires continues ayant une fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6x & \text{pour } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $P(X + Y < 0.4)$.

- A) 0.016 B) 0.16 C) 0.24 D) 0.024 E) 0.048

- 42] Soit X et Y les remboursements pour une hospitalisation suite à un accident. X représente les frais d'hébergement et Y les frais de soins médicaux. On suppose que la fonction de densité conjointe de X et Y est :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{10}(x+y) \text{ pour } 0 \leq y \leq 2x+1 \leq 3$$

Trouver de combien l'espérance des frais de soins médicaux va dépasser l'espérance des frais d'hébergement.

- A) $-3/4$ B) $-1/4$ C) 0 D) $1/4$ E) $3/4$

- 43] La durée de vie future du chat Félix est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, 20]$ alors que la durée de vie future du chien Rex est de loi exponentielle. On suppose que les deux durées de vie sont indépendantes et de même moyenne.

Trouver la probabilité que Rex meure avant Félix.

- A) 0.568 B) 0.543 C) 0.499 D) 0.450 E) 0.412

- 44] Soit X et Y deux variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = 6xy^2 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1.$$

Trouver $E[X \cdot Y]$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{2}{3}$

- 45] Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X^n | Y = y]$ pour $n \geq 1$.

- A) e^{-ny} B) y^n C) 1 D) $\frac{y^{n+1}}{n+1}$ E) $\frac{1}{n+1}$

- 46] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{4}$ pour $0 < x < 2, 0 < y < 2$. Posons $W = \min(X, Y)$, le minimum entre X et Y .

Calculer $E[W]$.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{5}{12}$

- 47] Soit X et Y les pertes d'un couple d'assurés dont la fonction de densité conjointe est :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité que la perte de X soit moindre que le double de celle de Y .

- A) $\frac{7}{32}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{19}{24}$ E) $\frac{3}{4}$

- 48] La fonction de densité de la loi marginale X est $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$. La fonction de densité de la loi conditionnelle $Y|X = x$ est $f_{Y|X=x}(Y|X = x) = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$, $0 < y < 1$. Trouver la fonction de densité de la loi marginale Y .

A) $\frac{1}{2} + y$ B) $\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$ C) $1+y$ D) y E) $3y^2$

- 49] Vous choisissez un nombre $X = x$ entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Vous choisissez ensuite un second nombre Y entre x et 2 toujours selon une loi uniforme. Trouver $P(X + Y \leq 2)$.

A) $\ln 2$ B) $1 - \ln 2$ C) $2 - 2 \ln 2$ D) $2 \ln 2 - 1$ E) $\frac{\ln 2}{2}$

- 50] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 - |x| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Var}[X]$.

A) $\frac{11}{18}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

51] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{pour } 0 < y < x < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver le coefficient de corrélation, $\rho_{X,Y}$, de X et Y .

- A) 1 B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) 0 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

52] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-xy-x} & \text{pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X|Y = y]$ pour $0 \leq y \leq e - 1$

- A) $(y + 1)^{-2}$ B) $\ln(y + 1)$ C) $(e - 1)^{-1}$ D) $\frac{1}{y + 1}$ E) $\frac{1}{y}$

53] Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver $P(X^2 \geq Y^3)$.

- A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{3}$

54] Soit X et Y deux variables aléatoires continues avec fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la covariance de X et Y .

- A) -2 B) 2 C) -1 D) 1 E) 0

55] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & \text{pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X^2 \cdot Y]$.

- A) $\frac{3}{4}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

56] Deux hommes d'affaires se donnent rendez-vous dans un bon restaurant entre 12h00 et 12h30. En supposant que les temps d'arrivée des deux sont indépendants et uniformément distribués, trouver la probabilité que le premier à arriver attende moins de 10 minutes avant l'arrivée du second.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{9}$

57] Soit X et Y deux variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(X > \frac{1}{2} \mid Y > \frac{1}{2})$.

- A) $\frac{43}{52}$ B) $\frac{43}{64}$ C) $\frac{13}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

58] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P(\frac{X}{2} < Y < X)$.

- A) $\frac{3}{32}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

59] Messieurs Smith et Jones font deux réclamations d'assurance indépendantes et uniformément distribuées entre 1 million et 3 millions de dollars. Trouver la probabilité que le total des deux réclamations soit moins de 2.5 millions et que Smith réclame moins que Jones.

- A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{5}{64}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{8}{81}$ E) $\frac{1}{4}$

[60] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{4} & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[Y]$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{6}$ D) 1 E) $\frac{7}{6}$

[61] Pour les variables aléatoires continues X et Y du problème [9], trouver la fonction de densité de $X|Y = \frac{1}{4}$.

- A) $\frac{2x+1}{16}$ B) $\frac{4x+3}{16}$ C) $\frac{8x+1}{16}$ D) $\frac{2x+1}{8}$ E) $\frac{8x+1}{5}$

[62] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x-y) & \text{pour } x > 0, y > 0 \text{ et } x+y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[Y]$.

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

[63] Pour les variables aléatoires X et Y du problème précédent, trouver $f_{X|Y}(x|y = \frac{1}{4})$.

- A) $\frac{4}{3}(2-5x)$ B) $\frac{4}{3}(1-2x)$ C) $\frac{2}{3}(1-4x)$ D) $\frac{8}{9}(3-4x)$ E) $\frac{8}{9}(1-3x)$

[64] Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver la fonction de densité $f_T(t)$, $0 < t < 1$, de $T = X \cdot Y$.

- A) 1 B) $3t^2$ C) $-\ln t$ D) $(\ln t)^2$ E) $2t$

[65] Un petit avion à deux hélices s'écrase dès qu'une de ses deux hélices tombe en panne. Si la fonction de densité conjointe des durées de vie en heures (c'est-à-dire jusqu'à une panne), X et Y , des deux hélices est $f_{X,Y}(x, y) = (x + y)/8$, $0 < x < 2$, $0 < y < 2$ (et 0 sinon), trouver la probabilité que l'avion s'écrase (suite à une panne) durant la première heure d'un vol de deux heures.

- A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

[66] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y} & \text{pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'écart-type de $X + Y$.

- A) $\sqrt{12}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

[67] Soit X, Y, Z trois variables aléatoires discrètes de distribution simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{xyz}{108} \quad \text{pour } x = 1, 2, 3; \quad y = 1, 2, 3; \quad z = 1, 2.$$

Trouver la distribution conjointe de Y, Z sachant $X = 3$.

- A) $\frac{yz}{108}$ B) $\frac{yz}{36}$ C) $\frac{yz}{18}$ D) $\frac{yz}{9}$ E) $\frac{yz}{3}$

[68] Dans une urne il y a des boules numérotées 1, 2, 3. On pige au hasard, sans remplacement, une première boule puis une seconde. Soit X le numéro sur la première boule et Y le numéro sur la seconde. Trouver $\rho_{X,Y}$, le coefficient de corrélation entre X et Y .

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

[69] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance conditionnelle de X sachant $Y = 1/3$.

- A) $\frac{2+6y}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

[70] Soit $f_{X,Y}(x, y) = x + y$ la fonction de densité conjointe des variables aléatoires continues X et Y , pour $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Trouver $\text{Var}[X]$.

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{11}{144}$ E) $\frac{21}{144}$

- [71] Une compagnie d'assurance a trois grands groupes, A, B, C , d'assurés. Les taux de réclamations (c'est-à-dire les pourcentages de gens qui font une réclamation) pour les trois groupes sont respectivement X, Y, Z ; trois variables aléatoires continues de fonction de densité simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + 3y + z) \quad \text{pour } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1.$$

Trouver la probabilité que pour chacun des trois groupes, moins de 50% font des réclamations.

- A) 0.3125 B) 0.250 C) 0.1875 D) 0.125 E) 0.0625

- [72] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y}{4} & \text{pour } 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Var}[Y]$.

- A) $\frac{23}{144}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{1}{144}$ D) $\frac{8}{37}$ E) $\frac{11}{36}$

- [73] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonctions de densité conjointes :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3}xy & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la covariance de X et Y .

- A) 0.68 B) 0.45 C) 0.04 D) 0.12 E) 0.22

- [74] X représente l'âge d'une automobile assurée qui a été impliquée dans un accident et Y représente le montant du sinistre encouru lors de l'accident. X et Y ont la fonction de densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x+y)/1000 & \text{pour } 0 \leq x \leq 10 \text{ et } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité que $X < Y/2$.

- A) 11% B) 21% C) 31% D) 41% E) 51%

- [75] Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Var}[X|Y = y]$.

- A) $\frac{1}{12}$ B) y^2 C) 1 D) $\frac{y}{12}$ E) e^{-y}

- [76] Vous choisissez un nombre $X = x$ entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Vous choisissez ensuite un second nombre Y entre x et 1 toujours selon une loi uniforme. Trouver $P(X + Y \leq 1)$.

- A) $\ln 2$ B) $1 - \ln 2$ C) e^{-1} D) $1/2$ E) $1/4$

[77] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y}{4} & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la fonction de densité de $X|Y = 1$.

- A) $x + y$ B) $y + \frac{1}{2}$ C) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ D) $2x$ E) $x + \frac{1}{2}$

[78] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la variance conditionnelle de X sachant $Y = 1/2$.

- A) $\frac{13}{14}$ B) $\frac{13}{162}$ C) $\frac{13}{81}$ D) $\frac{17}{18}$ E) $\frac{3}{4}$

[79] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (0.32) e^{-(0.8)x - (0.4)y} & \text{pour } 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[Y - X]$.

- A) -0.4 B) -1.25 C) 1.25 D) 0.32 E) 0.4

- [80] Soit X et Y deux pertes qui sont des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy + 3x^2 & \text{pour } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité que la perte Y soit moindre que 0.5.

- A) 0.015625 B) 0.03125 C) 0.0625 D) 0.125 E) 0.25
- [81] Soit X et Y deux v.a. discrètes dont la distribution conjointe est donnée par le tableau :

		X		
		0	1	2
Y	0	0.3	0.2	0.1
	1	0.2	0.1	0.1

Trouver le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

- A) 0.02 B) 0.052 C) 0.092 D) 0.151 E) 0.252
- [82] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{7} x(1+y) & \text{pour } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $h(x,y) = f_{X|Y=y}(x|y)$ alors que vaut $h(0.25, 0.5)$

- A) 1 B) 0.5 C) 4 D) 3 E) 2

83] Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes dont la distribution conjointe est :

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = \frac{1}{7} - \frac{x}{35} \text{ pour } 0 \leq y \leq x \leq 4$$

où x et y ne prennent que des valeurs entières. Trouver $P(0 \leq X \leq 3 \mid Y = 1)$.

- A) 0.5 B) 0.6 C) 0.7 D) 0.8 E) 0.9

84] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P(X > 0.25, Y \leq 0.5)$

- A) $\frac{11}{16}$ B) $\frac{23}{32}$ C) $\frac{21}{32}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{25}{32}$

85] Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable conditionnée $X \mid Y = \frac{1}{2}$ pour les valeurs possibles de x .

- A) $5(1 - \sqrt{x})$ B) $15(x - \sqrt{x})$ C) 1 D) $2x$ E) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

- [86] Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ne prenant que les valeurs -1 et $+1$. Si $P(X = -1, Y = -1) = 0.8$, $P(X = -1, Y = 1) = 0.05$, $P(X = 1, Y = -1) = 0.025$ et $P(X = 1, Y = 1) = 0.125$, calculer $\text{Var}[X|Y = -1]$.

A) 0.1175 B) 0.2050 C) 0.2200 D) 0.4650 E) 0.5445

- [87] Pour une assurance, la perte X (en milliers de dollars) suit une loi de fonction de densité $f_X(x) = \frac{3x^2}{8}$ pour $0 \leq x \leq 2$. Si le temps (en heures) pour traiter la réclamation pour une perte $0 \leq x \leq 2$ est uniformément distribué entre x et $2x$, calculer la probabilité que ça prenne plus de 3 heures pour traiter une réclamation aléatoire.

A) $\frac{29}{64}$ B) $\frac{23}{64}$ C) $\frac{17}{64}$ D) $\frac{11}{64}$ E) $\frac{5}{64}$

- [88] Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2 - x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(X < 1)$.

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

- [89] Une compagnie d'assurance a trois grands groupes, A, B, C , d'assurés. Les taux de réclamations (c'est-à-dire le pourcentage des gens qui font une réclamation) pour les trois groupes sont respectivement X, Y, Z , trois variables aléatoires continues de fonction de densité simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + 2y + 3z) \quad \text{pour } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1.$$

Trouver la probabilité que pour chacun des trois groupes, moins de 50% font des réclamations.

- A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

- [90] Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformément distribuées sur le demi-disque $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$.

Trouver $f_X(x)$, la fonction de densité de la marginale X , pour $0 \leq x \leq 1$.

- A) $\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ B) $2\sqrt{1-x^2}$ C) $\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ D) $\frac{2}{\pi}$ E) 1

- [91] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2 - x - y) & \text{pour } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2, \quad x + y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité conditionnelle $P(X < 1 \mid Y < 1)$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{49}{64}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{7}{8}$

92] Les variables aléatoires continues X et Y ont la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{12}$

93] Soit X et Y des variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X^2 + Y^2]$.

- A) $\frac{13}{15}$ B) $\frac{14}{15}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{11}{15}$ E) $\frac{2}{3}$

94] Les durées de vie future (en années) d'un homme et de son épouse sont des variables aléatoires continues, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 50]$.

Trouver la probabilité que l'épouse survivra d'au moins 5 ans à son mari.

- A) 0.35 B) 0.405 C) 0.435 D) 0.475 E) 0.49

- 95] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2 - x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver $P(Y > 1)$.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

- 96] Supposons que les nombres aléatoires d'accidents durant l'année à venir pour un couple sont $X = 0, 1$ ou 2 , pour la femme et $Y = 1$ ou 2 , pour l'homme. Si la distribution conjointe est $p(x, y) = \frac{x+y}{15}$ pour $x = 0, 1, 2$ et $y = 1, 2$, trouver l'espérance du nombre d'accidents de l'homme sachant que la femme a eu deux accidents.

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{11}{15}$ C) $\frac{11}{9}$ D) $\frac{11}{7}$ E) 1

- 97] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver l'espérance conditionnelle $E[Y|X = 2/3]$.

- A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{3}{5}$

- 98] Soit X et Y des variables aléatoires continues, indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver $P(X^2 \geq 2Y)$.

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

99] Soit X et Y deux variables aléatoires continues avec fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X]$.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

100] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Cov}(X, Y)$, la covariance de X et Y .

- A) $-\frac{1}{144}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) 0 D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{144}$

101] Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable conditionnée, $X|Y = \frac{1}{3}$, pour les valeurs possibles de x .

- A) 5 B) $3x^2$ C) $15(x - x^{1/3})$ D) $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$ E) $\frac{1}{3}$