EXAMEN INTRA (2/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Les éléments de réponse sont donnés à titre indicatif, pour justifier la réponse. Des statistiques sur les différentes réponses sont mentionnées pour chaque question.

$\boxed{1}$ La fonction de densité X du montant d'une réclamation est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pour } x > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons qu'il y ait trois réclamations indépendantes. Trouver l'espérance de la plus grande des trois.

A) 3.375 B) 2.232 C) 2.70 D) 2.025 E) 4.50

On travaille ici sur le maximum de X_1, X_2, X_3, indépendantes de loi f. Rappelons que la fonction de répartition du maximum (appelons Y cette variable aléatoire) est

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\forall i, X_i \leq y) = \prod \mathbb{P}(X_i \leq y) = F_X(y)^3$$

Or ici, pour $x > 1$,

$$F_X(x) = \int_1^x f_X(u)du = \int_1^x 3x^{-4}du = \left[-x^{-3}\right]_1^x = 1 - x^{-3}.$$

Aussi,

$$F_Y(x) = \left(1 - x^{-3}\right)^3.$$

Pour calculer l'espérance, faisons simple (on verra une méthode plus intéressante par la suite, dans la question 21) et dérivons cette fonction

$$f_Y(x) = 3 \cdot \left(3x^{-4}\right) \cdot \left(1 - x^{-3}\right)^2 = \ldots = \frac{9}{x^4} - \frac{18}{x^7} + \frac{9}{x^{10}}$$

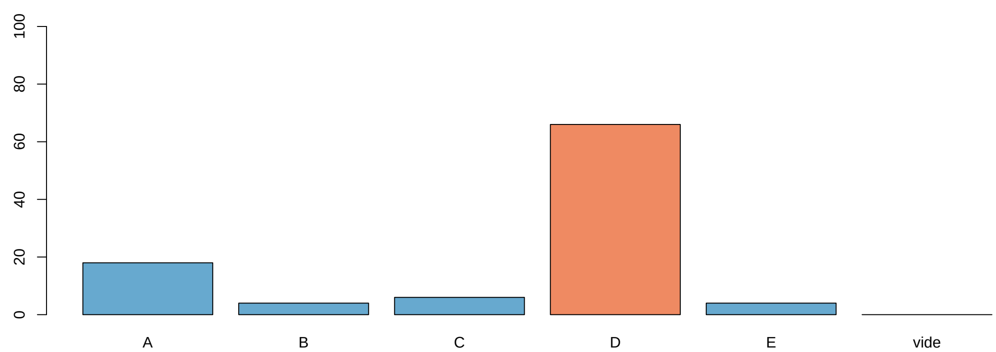
Bon, on va avoir une fonction simple à intégrer ici (à condition de ne pas faire d'erreurs de calculs)

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^\infty x \cdot f_Y(x)dx = \int_1^\infty \frac{9}{x^3} - \frac{18}{x^6} + \frac{9}{x^9}dx,$$

soit (je passe les calculs mais une primitive de x^a est $x^{a+1}/(a+1)$)

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{9}{2} - \frac{18}{5} + \frac{9}{8} = \frac{81}{40} = 2.025$$

qui était la réponse D.



Les réponses étaient décallées par rapport à celles proposées dans Labelle (2011) pour qui cette réponse était la réponse E.

$\boxed{2}$ Le profit annuel d'une compagnie I est modélisé par une variable aléatoire continue $X > 0$ de fonction de densité $f_X(x)$. Le profit de la compagnie II est de 20% supérieur. Trouver la fonction de densité du profit Y de la compagnie II.

A) $\dfrac{5}{6}f_X\left(\dfrac{5}{6}y\right)$ B) $\dfrac{6}{5}f_X\left(\dfrac{6}{5}y\right)$ C) $f_X\left(\dfrac{6}{5}y\right)$ D) $\dfrac{6}{5}f_X\left(\dfrac{5}{6}y\right)$ E) $f_X\left(\dfrac{5}{6}y\right)$

X admet pour densité f_X. Y est 20% supérieur donc $Y = 1.2 \cdot X = \dfrac{6}{5}X$. Comme je l'ai dit en classe, je suis nul pour utiliser des formules apprises par coeur (en l'occurence cette sur le changement de variable), et pour éviter de se tromper, on peut passer par les fonctions de répartition.

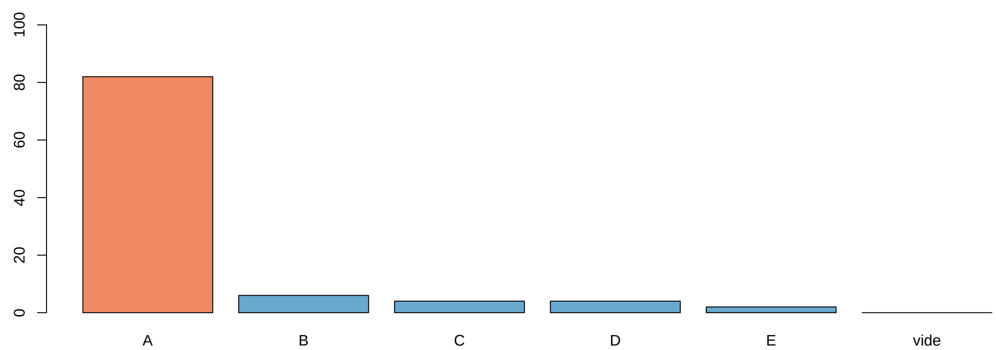
$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{6}{5}X \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{5}{6}x\right) = F_X\left(\frac{5}{6}x\right)$$

Pour avoir la densité, on dérive

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \frac{5}{6} \cdot f_X\left(\frac{5}{6}x\right)$$

qui correspond à la réponse A.

Là encore, les réponses étaient décallées par rapport à celles proposées dans Labelle (2011) pour qui cette réponse était la réponse B.



$\boxed{3}$ Soit X_1, X_2, X_3 trois observations indépendantes de la variable aléatoire continue X ayant la fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & \text{pour } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois observations soient supérieures à 1.

A) $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$ B) $3 - 2\sqrt{2}$ C) $3(\sqrt{2} - 1) \cdot (2 - \sqrt{2})^2$

D) $\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ E) $3\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\right)$

On a trois variables indépdantes. La probabilité que X_i dépasse 1 est

$$\mathbb{P}(X_i \geq 1) = \int_1^{\sqrt{2}} f_X(x)dx = \int_1^{\sqrt{2}} [\sqrt{2} - x]\, dx = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}^2\right) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

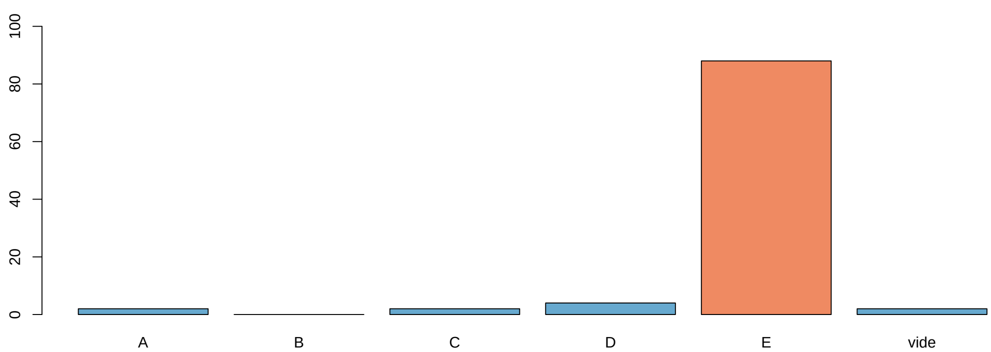
(il aurait été plus raisonnable de calculer la probabilité d'être inférieur à 1, mais passons). Notons p cette probabilité. En faisant un peu de combinatoire, on nous demande de calculer

$$\binom{3}{2} p^2(1-p)$$

soit

$$\binom{3}{2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$$

qui correspond à la réponse E.



$\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de distribution est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1 - 9x^{-2} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Soit $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_5)$, où $X_1, X_2, \ldots, X_5$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Trouver $E[Y]$.

A) 6 B) 4 C) $\frac{20}{3}$ D) 5 E) $\frac{10}{3}$

Cette question fait penser à la première, non ? Pour trouver le minimum, c'est toujours pareil, on passe par les fonctions de survie. Pour tout $x \in [3, \infty[$

$$\mathbb{P}(Y > x) = \mathbb{P}(\forall i \in \{1, \dots, 5\}, X_i > x) = \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i > x) = \prod_{i=1}^{5} (9x^{-2})^5 = 3^{10}x^{-10}$$

qui correspond à la fonction de survie. Pour calcul de la dérivée, on peut noter qu'il s'agit de l'opposé de la dérivée de la fonction de survie,

$$f_Y x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = -\frac{d}{dx}[1 - F_Y(x)] = -\frac{d}{dx}\mathbb{P}(Y > x)$$

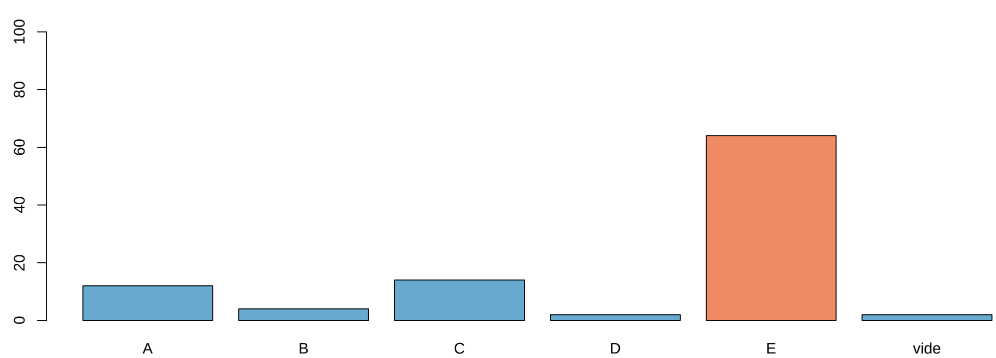
aussi ici

$$\frac{d}{dx}\mathbb{P}(Y \leq x) = 10 \cdot 3^{10} \cdot x^{-11}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(Y) = \int_3^\infty x \cdot 10 \cdot 3^{10} \cdot x^{-11}\, dx = 10 \cdot 3^{10} \cdot \int_3^\infty x^{-10}\, dx = 10 \cdot 3^{10} \cdot \left[\frac{-1}{9x^9}\right]_3^\infty = \frac{10}{3}$$

qui correspond à la réponse E. Pour information, la réponse A correspondait à la moyenne des X_i, il est donc rassurant d'avoir un minimum plus petit, en moyenne.



$\boxed{5}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = (2x)^{-1}$ pour $e^{-1} < x < e$. Si trois observations indépendantes de X sont faites, trouver la probabilité que l'une soit moins de 1 et que les deux autres soient plus de 1.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

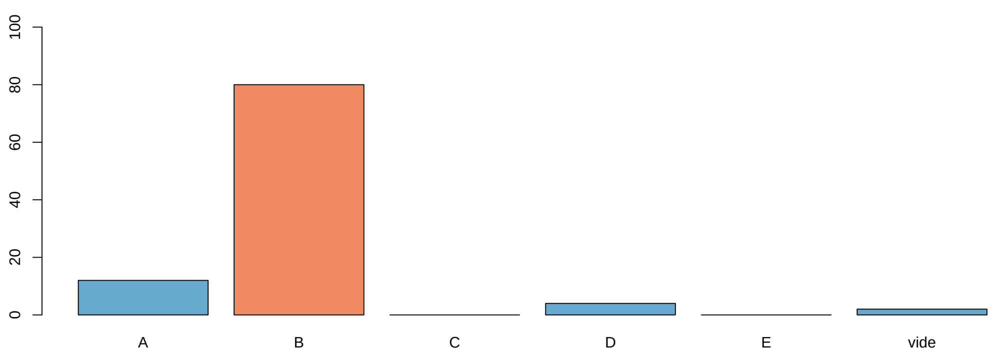
Cette question fait penser à la troisième.... Il nous faut déjà la probabilité que X_i soit inférieure à 1.

$$\mathbb{P}(X_i < 1) = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{dx}{2x} = \left[\frac{1}{2}\log x\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{2}$$

tiens, 1 est la médiane des X_i. On veut ici que parmi les 3, deux soient plus grandes, et une soit plus petite que 1, soit

$$\binom{3}{2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

qui correspond à la réponse B.



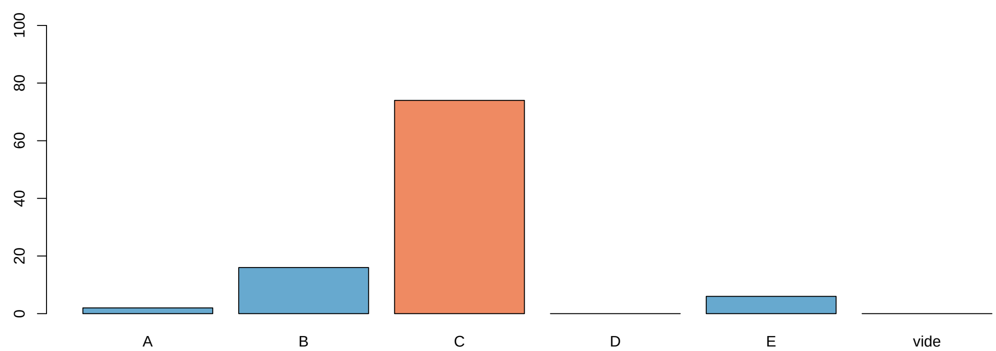
$\boxed{6}$ Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Si $P(X > 1) = P(X \leq 1)$ que vaut $E[X]$?

A) $\frac{1}{e}$ B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{\ln 2}$ D) e E) 1

Si $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \leq 1)$, c'est que 1 est la médiane de X, puisqu'alors $\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2}$. Rappelons que pour une loi exponentielle de paramètre λ (de moyenne λ^{-1})

$$\mathbb{P}(X > 1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-\lambda}$$

donc ici $\lambda = \log(2)$. On obtient la réponse C (car il faut prendre l'inverse de λ).



$\boxed{7}$ La variable aléatoire X, montant d'une réclamation, se répartit selon la densité exponentielle. Trouver $\text{Var}[X]$ sachant que $P(X \leq 2) = 2P(X \geq 4)$.

A) $\frac{2}{\ln 2}$ B) $\frac{8}{(\ln 2)^2}$ C) $\frac{(\ln 2)^2}{4}$ D) $\frac{2}{\ln \sqrt{2}}$ E) $\frac{4}{(\ln 2)^2}$

On continue sur la loi exponentielle. Cette fois, on nous dit que

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = 2 \cdot \mathbb{P}(X \geq 4)$$

ce qui se traduit, pour une loi exponentielle de paramètre λ (de moyenne λ^{-1}) par la relation

$$1 - \exp(-2\lambda) = 2 \cdot \exp(-4\lambda)$$

soit, si on pose $x = \exp(-2\lambda)$,

$$1 - x = 2 \cdot x^2 \text{ soit } 2x^2 + x - 1 = 0$$

On a une équation de degré 2, et la contrainte sur la racine que l'on cherche est qu'elle soit positive. Ici les racines sont

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1.$$

On va retenir la racine positive. Donc

$$\exp(-2\lambda) = \frac{1}{2} \text{ soit } \lambda = \frac{\log 2}{2}.$$

On a le paramètre de notre loi exponentielle. Pour calculer la variance, rien de plus simple car on sait que la variance d'une loi exponentielle est le carré de l'espérance, soit λ^{-2}.

Si on ne s'en souvient pas, on utilise une formule fondamentale du cours d'analyse, $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$. Et si on ne se souvient pas de cette dernière, on fait des intégrations par parties pour retrouver ce résultat.

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

avec

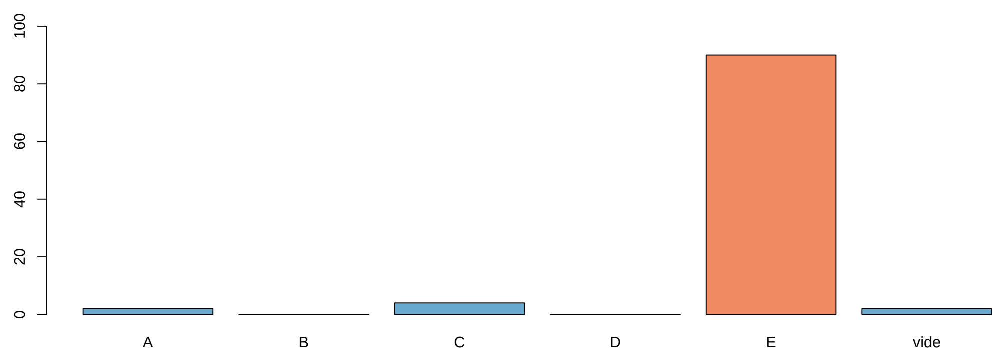
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

et donc

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On va maintenant pouvoir conclure car la variance sera alors

$$\left(\frac{\log 2}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{[\log 2]^2}$$



qui est la réponse E.

$\boxed{8}$ L'actuaire attend le premier des trois rapports faits simultanément par des inspecteurs indépendants avant de commencer son étude menant au remboursement des dommages d'un assuré. Si les temps (en semaines) pour faire leurs rapports suivent des lois exponentielles de moyenne 2, 3, 4 respectivement et le temps de l'étude de l'actuaire est aussi une exponentielle de moyenne 5, combien de temps (en semaines) y aura-t-il en moyenne avant le remboursement ?

A) 7 B) 8 C) $\frac{77}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) 14

Comme toujours (oui, je me répète), quand on travaille sur le minimum (on veut la date d'arrivée du premier rapport), on utilise la fonction de survie !. Soit $W = \min\{X_1, X_2, X_3\}$, alors

$$\mathbb{P}(W > x) = \mathbb{P}(\forall i \in \{1,2,3\}, X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x)$$

qui correspond à la fonction de survie. Or $\mathbb{P}(X_i > x) = e^{-\lambda_i x}$, soit ici $\mathbb{P}(X_i > x) = e^{-(i+1)x}$, donc

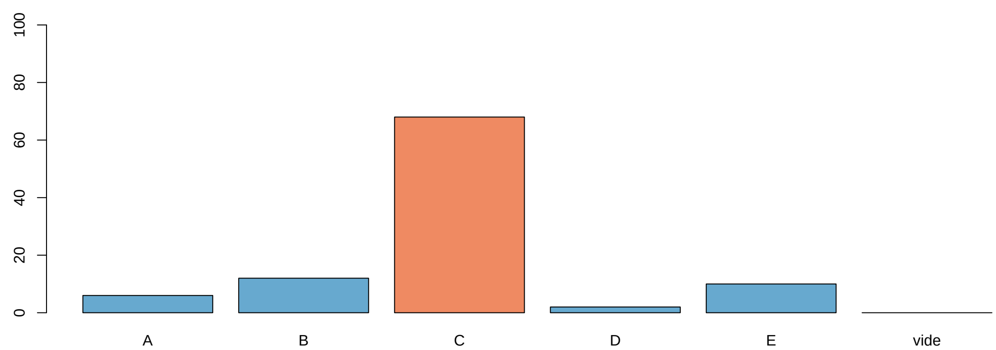
$$\mathbb{P}(W > x) = \exp\left(-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]\cdot x\right)\exp\left(-\frac{13}{12}\cdot x\right)$$

qui est une loi exponentielle de moyenne $12/13$. Ca va nous sauver des calculs pour la suite... Sinon, si on ne reconnait pas la loi, on dérive pour avoir la densité, et on calcule l'espérance...

Le temps moyen à attendre est le temps moyen avant l'arrivée du premier rapport, soit $12/13$, auquel s'ajoute le temps moyenne de l'étude, soit 5. La réponse est alors

$$\frac{12}{13}+5=\frac{77}{13}$$

qui est la réponse C.



$\boxed{9}$ Soit X une variable aléatoire discrète de loi de Poisson. Sachant que $E[X] = \ln 2$, trouver $E[\cos(\pi X)]$.

A) 0 B) $2\ln 2$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

On a une loi de Poisson de paramètre $log 2$.

$$\mathbb{E}[\cos(\pi X)] = \sum_{x=0}^{\infty} \cos(\pi x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

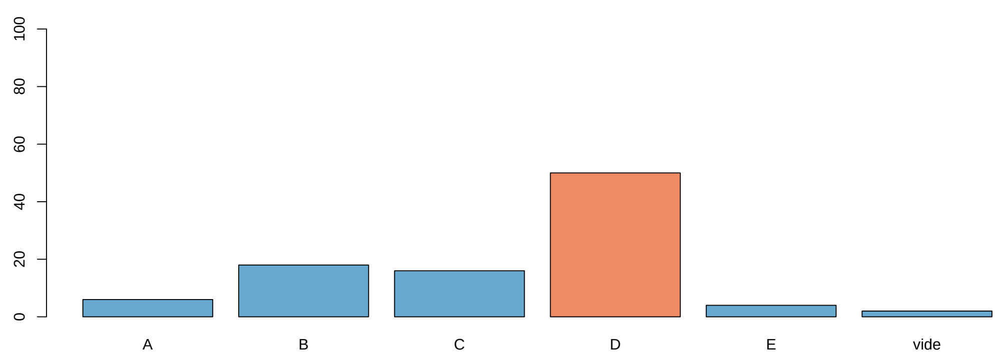
Comme ici x est entier, $\cos(\pi x)$ est une fonction assez simple car elle prend les valeurs $+1$ et -1 en alternance : $\cos(\pi x) = (-1)^x$. Bref, on nous demande de calculer ici

$$\sum k = 0^{\infty} (-1)^x \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum k = 0^{\infty} \frac{(-\lambda)^x}{x!}$$

or on reconnaît à droite le développement en série entière de $\exp(-\lambda)$. Aussi,

$$\mathbb{E}[\cos(\pi X)] = \exp[-2\lambda] = \exp[-2 \log 2] = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

qui est la réponse D.



$\boxed{10}$ Soit X et Y des variables aléatoires discrètes de distribution conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{9} \, 2^{x-y+1} & \text{pour } x = 1, 2 \text{ et } y = 1, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E\left[\frac{X}{Y}\right]$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{25}{18}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{8}{9}$

On a ici un couple de variables qui peuvent prendre 4 valeurs. Le ratio (que l'on va noter R) peut alors prendre 3 valeur : $1/2$ (pour le couple $(1,2)$), 2 pour le couple $(2,1)$ et enfin 1, pour les couples $(1,1)$ et $(2,2)$. On peut calculer les trois probabilités respectives (ou les deux premières, la dernière en découlera)

$$\mathbb{P}\left(R=\frac{1}{2}\right)=\mathbb{P}\left((X,Y)=(1,2)\right)=\frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}\left(R=\frac{2}{1}\right)=\mathbb{P}\left((X,Y)=(2,1)\right)=\frac{4}{9}$$

ce qui devrait donner

$$\mathbb{P}\left(R=1\right)=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$$

Mais si on n'est pas convaincu, on peut faire les calculs

$$\mathbb{P}\left(R=1\right)=\mathbb{P}\left((X,Y)\in\{(1,1),(2,2)\}\right)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}$$

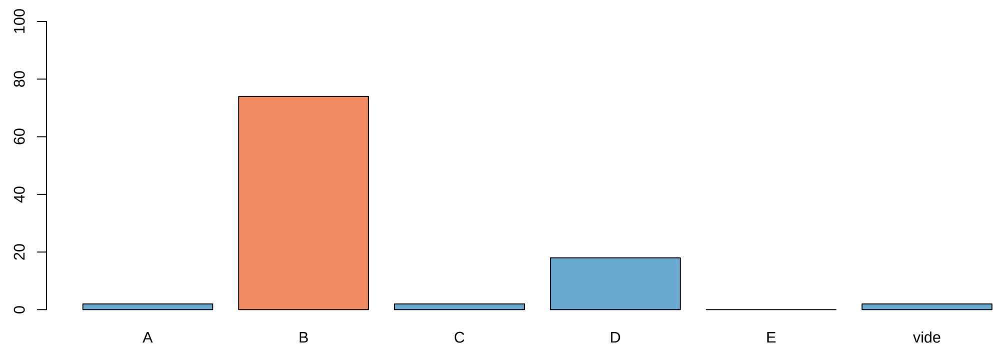
(qui correspond à ce qu'on attendait). Maintenant, reste à faire un simple calcul d'espérance,

$$\mathbb{E}(R)=\sum_r r\cdot\mathbb{P}\left(R=r\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{4}{9}=\frac{25}{18}$$

qui est la réponse B.

$\boxed{11}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x)=kx(1-x)$ où k est une constante et $0<x<1$. Trouver $\text{Var}[X]$.

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$



On se lance. D'abord, on peut chercher la valeur de la constante k (pour information, cette loi est une loi beta). Comme toujours, on utilise le fait que $\int f(x)dx = 1$, soit ici

$$\int_0^1 kx(1-x)dx = k\int_0^1 x - x^2 dx = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = k\,\frac{1}{6} = 1$$

Donc $k = 6$. La densité étant symmétrique par rapport à $1/2$ (on a une belle parabole), l'espérance est forcément $1/2$. Mais on peut le montrer en faisant un peu de calculs,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\,\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

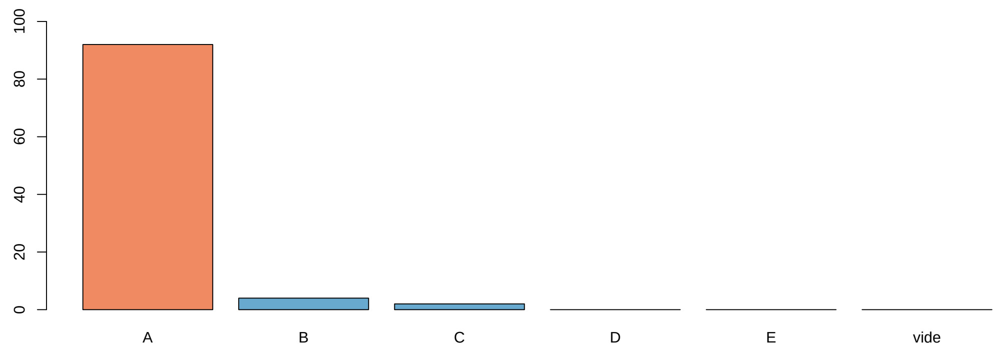
On continue ? Pour calculer la variance, on utilise la formule usuelle, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, et on calcule le terme qui nous manque ici

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\,\frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

de telle sorte que

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{10} - \frac{1}{2^2} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}.$$

On va donc retenir la réponse A.



$\boxed{12}$ Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0,1]$. Trouver $E[\max_{1\leq i\leq n} X_i] - E[\min_{1\leq i\leq n} X_i]$.

A) $\dfrac{1}{n+1}$ B) $1-\dfrac{1}{n}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{n}{n+1}$ E) $\dfrac{n-1}{n+1}$

On a fait plusieurs calculs sur le minimum et le maximum de variables indépendantes, et identiquement distribuées, lors des scéances précédantes. Il faut se souvenir pour pour le maximum on peut écrire (facilement) la fonction de répartition, et pour le minimum la fonction de survie (ou ici juste invoquer un argument de symmétrie du problème par rapport à $1/2$). C'est parti. Soit $M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, alors, pour tout $x \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}(\forall i \in \{1, \ldots, n\}, X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} x^n$$

qui correspond à la fonction de répartition. On peut ensuite utiliser l'astuce de calcul de la question 21, ou sinon calculer l'espérance plus classiquement, en passant par le calcul de la dérivée,

$$\frac{d}{dx}\mathbb{P}(M \leq x) = nx^{n-1}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(M) = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1}\, dx = n\int_0^1 x^n dx = n\,\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

afin de noter que plus n est grand, plus le maximum a de grandes chances d'être (très) proche de 1. Pour le minimum, on peut noter que $\min\{X_1,\dots,X_n\} \overset{\mathcal{L}}{=} 1-\max\{X_1,\dots,X_n\}$ par des propriétés de symmétrie du problème, car $X_i \overset{\mathcal{L}}{=} 1-X_i$. Mais sinon, on peut aussi faire des calculs. C'est parti. Posons $W = \min\{X_1,\dots,X_n\}$, alors, pour tout $x\in[0,1]$

$$\mathbb{P}(W>x)=\mathbb{P}(\forall i\in\{1,\dots,n\},X_i>x)=\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i>x)=\prod_{i=1}^n (1-x)^n$$

qui correspond à la fonction de survie. Pour calcul de la dérivée, on peut noter qu'il s'agit de l'opposé de la dérivée de la fonction de survie,

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=-\frac{d}{dx}[1-F_X(x)],$$

aussi ici

$$\frac{d}{dx}\mathbb{P}(W\leq x)=n(1-x)^{n-1}$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(W)=\int_0^1 x\cdot n(1-x)^{n-1}\,dx$$

Le plus simple est de réécrire x dans une autre base polynômiale, $\{1,1-x,(1-x)^2,\dots\}$ afin de simplifier les calculs. Ici, $x=1-(1-x)$, et donc

$$\mathbb{E}(W)=\int_0^1 [1-(1-x)]\cdot n(1-x)^{n-1}\,dx=\int_0^1 n(1-x)^{n-1}\,dx-\int_0^1 (1-x)\cdot n(1-x)^{n-1}\,dx$$

i.e.

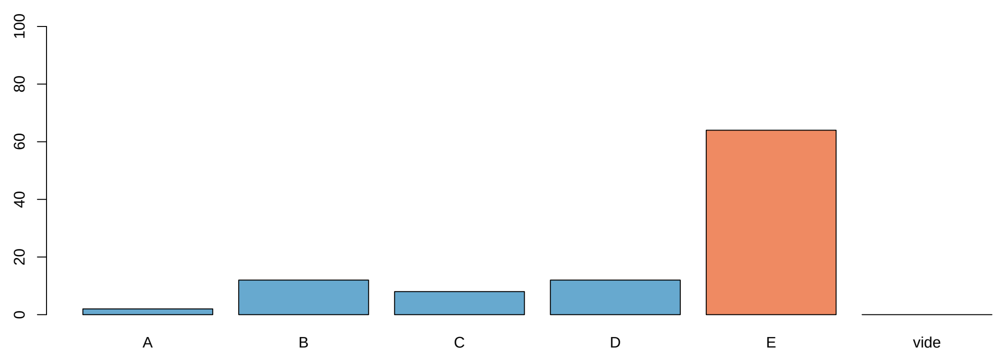
$$\mathbb{E}(W)=n\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1-n\left[\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1=\dots=\frac{1}{n+1}.$$

Ouf, au risque de se tromper plusieurs fois, on a fini par arriver au résultat qu'on avait dit que l'on devrait avoir. Bref, reste à conclure,

$$\mathbb{E}(M)-\mathbb{E}(W)=1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$$

qui est la réponse E.

Dans Labelle (2011), cet exercice était l'exercice 13.26, et la bonne réponse dans le livre était la réponse appelée A (ici E).



$\boxed{13}$ Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle avec moyenne 1. Trouver la valeur maximum de $P(x \leq X \leq 2x)$ pour $x \geq 0$.

A) 1 B) $\ln 2$ C) $\dfrac{1}{\ln 2}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{1}{2}$

Calculons $h(x) = \mathbb{P}(X \in [x, 2x]) = \mathbb{P}(X \leq 2x) - \mathbb{P}(X \leq x)$,

$$h(x) = e^{-x} - e^{-2x}$$

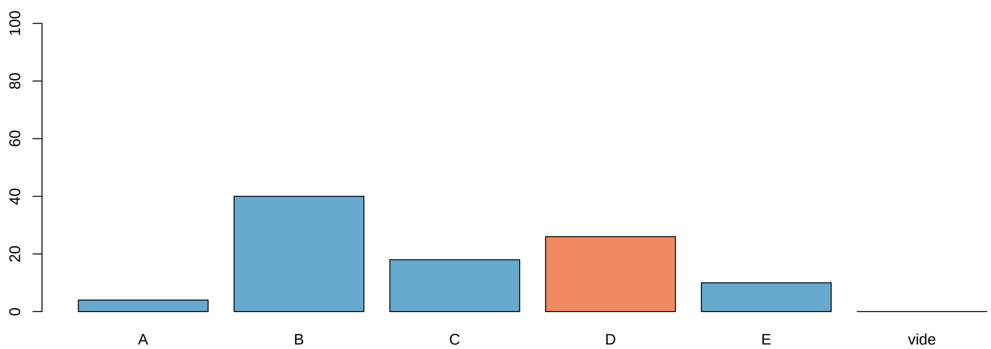
Bon, maintenant, utilisons des résultats vus dans les vieux cours d'analyse. En particulier, si on cherche des points intérieurs à un problème d'optimisation, une condition nécessaire (comme cette fonction est suffisement régulière) est que la dérivée s'annule au maximum (condition dite du premier ordre). On va donc calculer la dérivée de $h(\cdot)$,

$$h'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x}$$

donc $h'(x) = 0$ si et seulement si $e^{-x} = 1/2$, c'est à dire $x = \log 2$. On peut d'ailleurs montrer qu'en ce point, on a atteint un maximum en montrant que $h''(\log 2) = -1/2 < 0$. Sinon, on peut noter que h est positive, et $h(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Donc, comme h est forcément monotone sur $]0, \log 2]$, c'est que $h(\cdot)$ est croissante sur $]0, \log 2]$. Donc $\log 2$ est un maximum. La valeur prise par h en $\log 2$ (on nous demande la valeur maximal de la probabilité) est alors

$$h(\log 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

qui est la réponse D.



$\boxed{14}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.

Trouver $E[\max(X, Y)]$.

A) $\dfrac{1}{\lambda + \mu}$ B) $\dfrac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}$ C) $\dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ D) $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$ E) $\max(\lambda, \mu)$

C'est parti pour quelques calculs. Soit $Z = \max\{X, Y\}$. On a déjà vu plusieurs fois (cf. intra 1) comment travailler sur le maximum de variables aléatoires.

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z \text{ et } Y \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z) \cdot \mathbb{P}(Y \leq z)$$

par indépendance entre X et Y. Donc

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = [1 - e^{-\lambda z}] \cdot [1 - e^{-\mu z}] = 1 - e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} + e^{-(\lambda+\mu)z}$$

oui, on dévelope pour ensuite dériver sans se tromper. La densité de Z (oui, car cette fonction est absolument continue) est obtenue en dérivant la fonction ci-dessus,

$$0 + \lambda e^{-\lambda x} + \mu e^{-\mu z} - (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z} = f_Z(z).$$

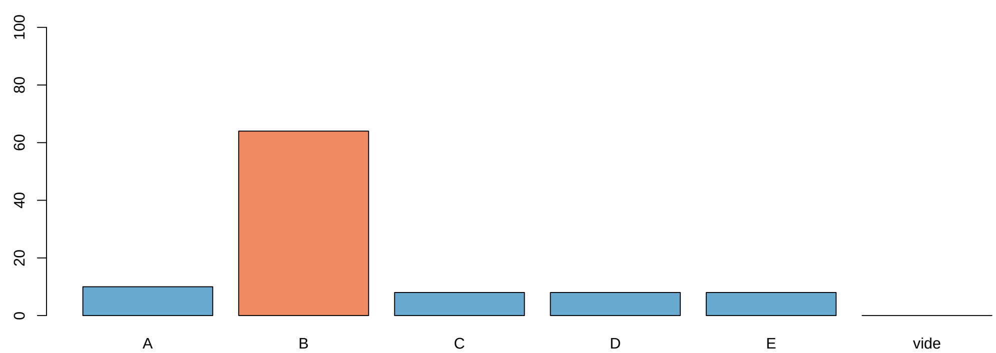
L'espérance de Z est alors

$$\mathbb{E}(Z) = \int 0^{\infty} z f_Z(z) dz = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda + \mu}$$

(je passe les calculs qui sont très simples). Cette expression n'est pas proposée, il fa falloir mettre au même dénominateur,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}$$

ce qui est moche, mais au moins on reconnaît une des expressions. On va retenir la réponse B.



$\boxed{15}$ Le petit Nestor collectionne les cartes de joueurs de Baseball dans les paquets de gommes à m,cher. Il y a en tout 20 cartes différentes (réparties aléatoirement, une par paquet). Combien de paquets de gommes Nestor devrait-il s'attendre à avoir à acheter pour obtenir la collection complète ?

A) 71.95 B) 98.41 C) 150 D) 224.67 E) 400

On note X_i le nombre de cartes nécessaire pour passer de $i-1$ nouvelles cartes à i. Par exemple X_1 vaut 1 (et n'est pas aléatoire). En achetant la première carte, on a notre première carte unique. Pour la seconde, X_2, il ne faut pas tirer celle obtenue au premier tirage. Donc X_2 suit une loi géométrique, de paramètre $p_2 = 19/20$. Pour la troisième X_3 suit une loi géométrique, de paramètre $p_3 = 18/20$, car on a 18 cartes possibles sur les 20 pour en avoir une nouvelle. Etc. Bref, X_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = (20-(i-1))/20$, pour $i = 1, \ldots, 20$. Aussi, si S désigne le nombre total de cartes à acheter, $T = X_1 + \ldots + X_20$, alors

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{20} \frac{20}{20-(i-1)}$$

soit

$$\mathbb{E}(T) = 20 \cdot \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20-(i-1)} = 20 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{20}\right)$$

Les champion(e)s de la calculatrice trouveront que

$$20 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{20}\right) \sim 71.95479,$$

qui est la réponse A.

Pour ce dernier point, on pouvait aller un peu plus vite pour trouver la solution car

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \log n + \gamma$$

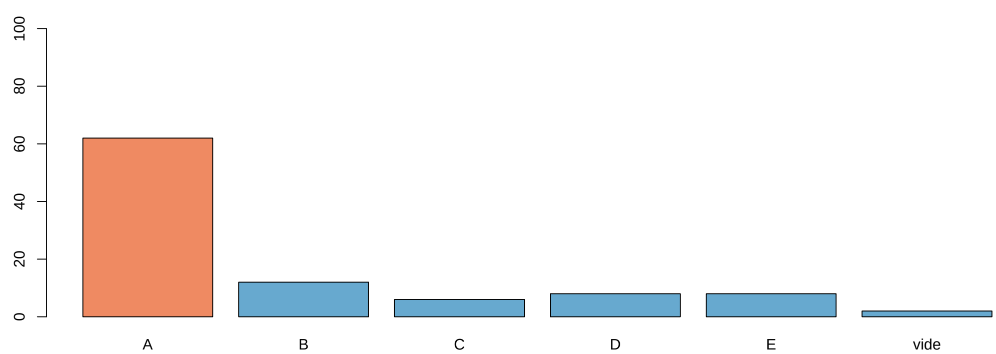
où γ désigne la constante d'Euler. Mais oublions la un instant. Si on veut faire un calcul rapide,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\sim\log n$$

donc

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{20}\sim\log 20=2.9957$$

Rappelons que la vraie valeur est 3.59774. Aussi, la valeur que l'on cherche doit être un peu (en fait il faut rajouter 20γ, avec $\gamma\sim 0.577$, ce qui n'est pas négligeable, on s'entend) plus grande que $20\log 20\sim 59.91$. C'est A la réponse la plus proche...



$\boxed{16}$ Si X est uniforme sur l'intervalle $]0,1]$, trouver $E[-\ln X]$.

A) -1 B) 0 C) $\dfrac{1}{e}$ D) 1 E) e

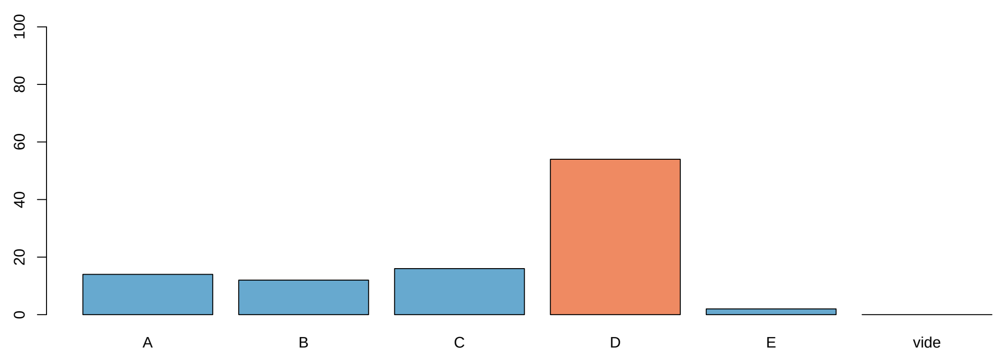
Bon, comme toujours sur les transformations de variables aléatoires, je préfère passer par les fonctions cumulatives. Posons $Y=-\log X$, de telle sorte que, pour tout $y\in]0,\infty[$

$$F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\leq y)=\mathbb{P}(-\log X\leq y)=\mathbb{P}(X\geq\exp[-y])$$

car $\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -\log x \leq y\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq \exp[-y]\}$. Bref,

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y}$$

qui est la fonction cumulative de la loi exponentielle de paramètre 1. Donc $\mathbb{E}(Y) = 1$, qui est la réponse D.



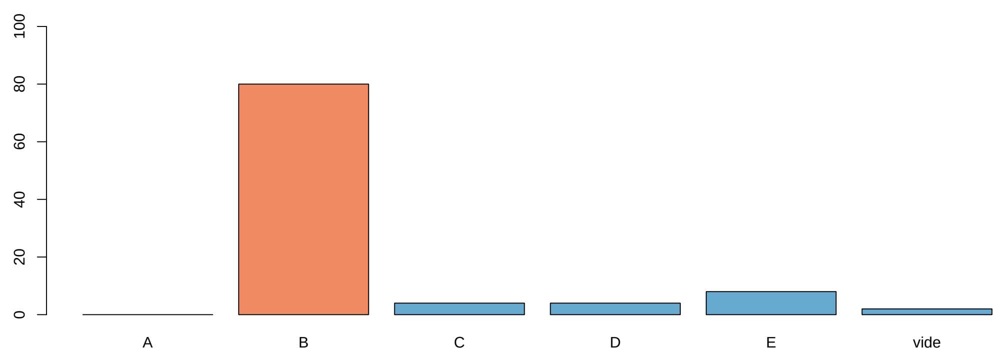
$\boxed{17}$ Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 2$ et $E[X(X-4)] = 5$. Trouver l'écart-type de $Y = -4X + 12$.

A) $\sqrt{24}$ B) 12 C) 4 D) 24 E) 144

On nous dit que $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{E}[X(X-4)] = 5$. Par linéarité de l'espérance, cette dernière expression s'écrit $\mathbb{E}[X(X-4)] = \mathbb{E}[X^2] - 4 \cdot \mathbb{E}(X) = 5$ de telle sorte que $\mathbb{E}[X^2] = 13$. Or $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$ donc $\text{Var}(X) = 13 - 2^2 = 9 = 3^2$. Bon, maintenant revenons à la question.

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(-4X + 12) = 4^2 \cdot \text{Var}(X) = 4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2$$

donc l'écart-type est ici 12. Qui est la réponse B.



$\boxed{18}$ Pour une police d'assurance, la perte X a la distribution discrète suivante :

$$X = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } 0.4 \\ 20 & \text{avec probabilité } 0.6 \end{cases}$$

Votre travail, comme actuaire, est de déterminer le déductible d à imposer pour que l'espérance du remboursement soit 6. Que vaut d ?

A) 1 B) 5 C) 7 D) 10 E) 15

Le remboursement est ici $Y_d = (X - d)_+$, qui prend ici les valeurs $(2 - d)_+$ avec probabilité 40% et $(20 - d)_+$ avec probabilité 60%. Donc

$$\mathbb{E}(Y_d) = \frac{2}{5} \cdot (2 - d)_+ + \frac{3}{5} \cdot (20 - d)_+.$$

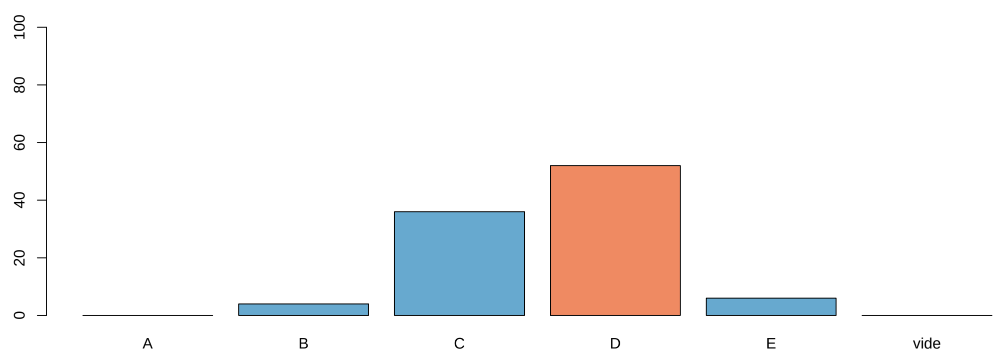
Il faudrait discuter en fonction de la valeur de d par rapport aux deux valeurs, ce qui donne 3 intervalles possibles. Faisons le plus simple, en commençant par supposer $d \in [2, 20]$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Y_d) = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot (20 - d) = 12 - \frac{3d}{5}$$

qui prend les valeurs limites $54/5 \sim 10.8$ si $d = 2$ et 0 si $d = 20$. Or $6 \in [0, 10.8]$, donc par continuité et monotonie de $d \mapsto \mathbb{E}(Y_d)$, *la* valeur de d est alors forcément dans l'intervalle $[2, 20]$. Bref, on cherche d telle que

$$\mathbb{E}(Y_d) = 12 - \frac{3d}{5} = 6 \text{ soit } \frac{3d}{5} = 6 \text{ soit } d = 10$$

qui est la réponse D.



$\boxed{19}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 8xe^{-4x^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la médiane de X.

A) 0.347 B) 1 C) 0.693 D) 0.416 E) 0.833

On a fait plusieurs exercices de calculs de médiane en cours. Pour cela, on passe par le calcul de la fonction de répartition.

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)du = \int_0^x 8u \exp[-4u^2]du = \left[-\exp\left(-4u^2\right)\right]_0^x = 1 - \exp\left[-4x^2\right], \text{ pour } x \geq 0.$$

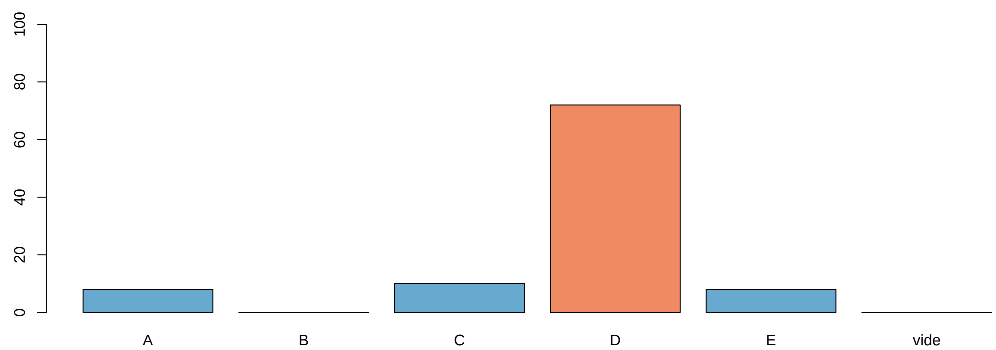
Comme on a une variable continue, la médiane m est solution de $F_X(m) = 1/2$, et donc m est solution de l'équation

$$1 - \exp\left[-4m^2\right] = \frac{1}{2} \text{ c'est à dire } \log 2 = 4m^2$$

où (comme toujours) log désigne le logarithme néperien. Aussi

$$m^2 = \frac{\log 2}{4} \text{ soit } m = \frac{\sqrt{\log 2}}{2} \sim 0.416$$

qui est la réponse D.



$\boxed{20}$ Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = \dfrac{|x|}{4}$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Trouver σ_X, l'écart-type de X.

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D) 2 E) 1

Bon, on se lance, en utilisant la formule de Chasles qui nous garantie, si les intégrales existent, que $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, aussi

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-2}^{+2} g(x) f_X(x) dx = \int_{-2}^{0} g(x) f_X(x) dx + \int_{0}^{+2} g(x) f_X(x) dx$$

Maintenant, ça sera plus simple. Pour l'espérance, on peut noter que la densité est symmétrique par rapport à 0 donc $\mathbb{E}(X) = 0$. Pour les non-convaincus, on peut faire des calculs avec $g(x) = x$, car les deux termes de droite donnent

$$\int_{-2}^{0} x\frac{-x}{4}dx + \int_{0}^{+2} x\frac{x}{4}dx = \left[\frac{-x^3}{12}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{12}\right]_{0}^{2} = \frac{-8}{12} + \frac{8}{12} = 0.$$

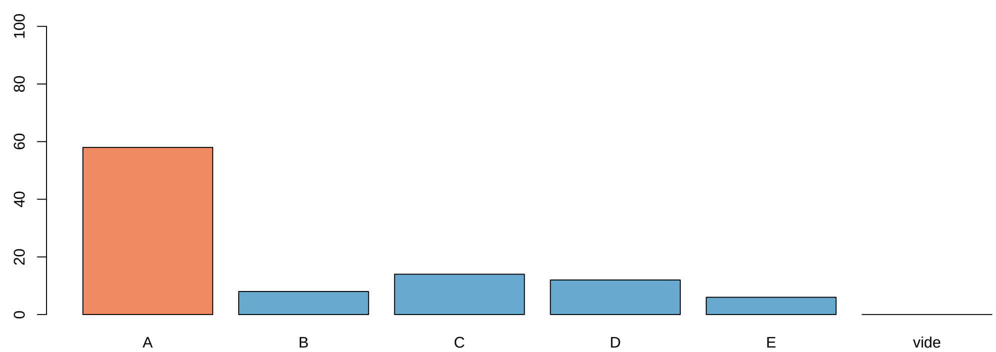
Ensuite, notons que l'écart-type est $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$, et

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-2}^{0} x^2\frac{-x}{4}dx + \int_{0}^{+2} x^2\frac{x}{4}dx = \left[\frac{-x^4}{16}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{16}\right]_{0}^{2}$$

soit

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 + 1 = 2$$

et donc la bonne réponse sera la réponse A. (Il s'agissait de la question 22.2 dans Labelle (2011) et la réponse A ici était la réponse B du livre).



$\boxed{21}$ Soit$X$ une variable aléatoire continue (telle que $X > 0$) de fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de distribution $F_X(x)$. Laquelle des expressions suivantes donne $E[X]$?

A) $\displaystyle\int_0^\infty F_X(x)dx$ B) $\displaystyle\int_0^\infty (1 - f_X(x))dx$ C) $\displaystyle\int_0^\infty xF_X(x)dx$

D) $\displaystyle\int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$ E) $\displaystyle\int_0^\infty f_X(x)dx$

Il s'agit ici d'un résultat classique de probabilité. On ne peut pas l'obtenir par intégration par partie, car cela suppose que l'on sache que si une variable aléatoire est dans L_1, alors $x\mathbb{P}(X > x) \to 0$ quand $x \to \infty$. La démonstration propre se fait en utilisant Fubini, et l'interversion de signes d'intégrales.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty uf_X(u)du \text{ et on écrit } u = \int_0^u dx,$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \int_0^u f_X(u)dxdu = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(u)dudx = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx.$$

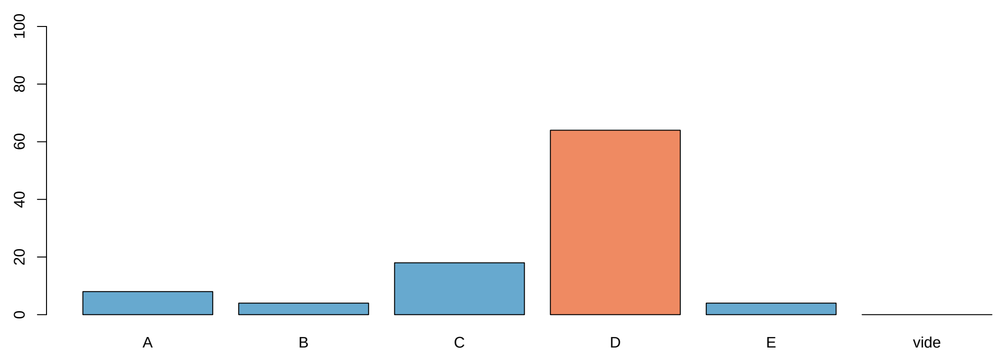
qui est la réponse D. Maintenant, on peut aussi regarder ce que donne l'intégration par partie.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty xf_X(x)dx \text{ et pose } u = x, v' = f_X(x), u' = 1 \text{ et } v = F_X(x) - 1$$

de telle sorte que

$$\mathbb{E}(X) = [x \cdot (F_X(x) - 1)]_0^\infty - \int_0^\infty [F_X(x) - 1]dx = \lim_{x\to\infty} \{x \cdot (F_X(x) - 1)\} + \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx.$$

Aussi, compte tenu des calculs précédants, on peut en conclure que si les calculs ici sont valides (ce qui revient à supposer que $X \in L_1$), alors forcément $x\mathbb{P}(X > x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Mais rigoureusement, c'est dans cet ordre que se font les calculs. Maintenant, on est à une préparation pour l'examen P, le but est de trouver (vite) la réponse.



$\boxed{22}$ À l'hiver 2013, le cours ACT2121 est offert à deux groupes formés aléatoirement. Le groupe 20 (respectivement 21) comprend 70 (respectivement 60) inscrits. En supposant que la note d'un étudiant quelconque du ACT2121 suit toujours une loi normale de moyenne 72 et variance 25, trouver la probabilité que les moyennes des deux groupes diffèrent par 3 points ou plus.

A) 0.9997 B) 0.6000 C) 0.0600 D) 0.0060 E) 0.0006

On attaque la série d'exercices sur la loi normale (on a 4 fois le même exercice). On a ici deux groupes, et deux échantillons sont tirés au hasard, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ avec $n = 70$ et $m = 60$. On note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i.$$

Alors, comme sommes de variables Gaussiennes indépendantes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ suivent des lois normales, de moyennes

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(\overline{Y}) = 72,$$

et de variances

$$\text{Var}(\overline{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\text{Var}(X_i}{n} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

alors que

$$\text{Var}(\overline{Y}) = \text{Var}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \frac{1}{m^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \frac{\text{Var}(Y_i}{m} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

On veut maintenant calculer $\mathbb{P}(|\overline{Y} - \overline{X}| > 3)$. Or on sait que la différence de deux lois normales indépendantes suit (encore) une loi normale, de moyenne

$$\mu = \mathbb{E}(\overline{Y} - \overline{X}) = \mathbb{E}(\overline{Y}) - \mathbb{E}(\overline{X}) = 0$$

et de variance

$$\sigma^2 = \text{Var}(\overline{Y} - \overline{X}) = \text{Var}(\overline{Y}) + \text{Var}(-\overline{X}) = \frac{5}{14} + \frac{5}{12} = \frac{65}{84}.$$

Aussi, $\overline{Y} - \overline{X} = \sigma Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et donc

$$\mathbb{P}(|\overline{Y} - \overline{X}| > 3) = \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{3}{\sqrt{\frac{65}{84}}}\right) = 2 \cdot \mathbb{P}\left(Z > \frac{3}{\sqrt{\frac{65}{84}}}\right) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

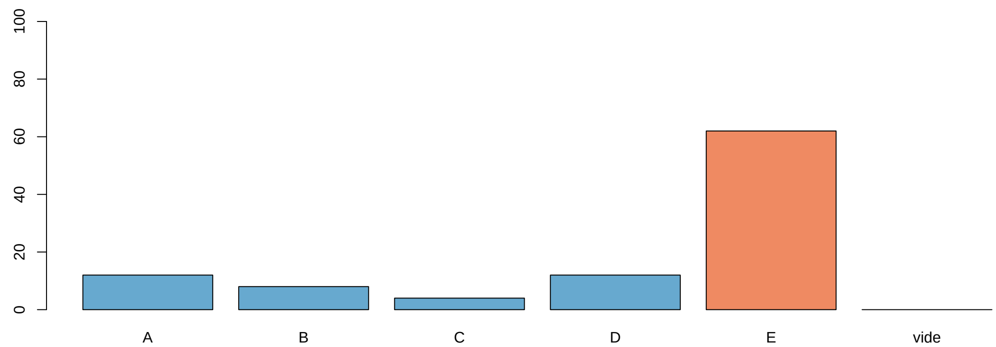
soit ici

$$\mathbb{P}(|\overline{Y} - \overline{X}| > 3) = 2 \cdot \mathbb{P}\left(Z > 3.4369\right).$$

On est ici sur une probabilité (très) petite. Si on regarde, dans la table en appendice, la dernière ligne était

3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

aussi $\mathbb{P}(Z \leq 3.09) \sim 99.9\%$, et donc $\mathbb{P}(Z > 3.09) \sim 0.001$. Or ici, on n'a pas 3.09 mais 3.437, donc $2 \cdot \mathbb{P}\left(Z > 3.4369\right) < 0.002$. Les 4 premières valeurs sont plus grandes de 0.2%, donc la seule réponse possibles est la réponse E. En fait, si on regarde avec n'importe quel logiciel de statistique, $\mathbb{P}\left(Z > 3.4369\right) \sim 0.0002941$, ce qui donne effectivement 0.0588% (proche de 0.06 proposés).



$\boxed{23}$ Les données de Statistique Canada révèlent que le revenu annuel brut des familles du Québec (respectivement de l'Ontario) suit une loi normale de moyenne 68 000\$ (respectivement 81 000\$) et d'écart-type 6 000\$ (respectivement 8 000\$). Cent familles sont choisies au hasard dans chacune des deux provinces. Trouver la probabilité que le revenu annuel moyen des cent familles de l'Ontario dépasse par au moins 15 000\$ celui des cent familles du Québec.

A) 2.28% B) 15.87% C) 50% D) 84.13% E) 99.72%

On a ici deux provinces, et deux échantillons sont tirés au hasard, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ avec $n = 100$. On note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les moyennes,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Alors, comme sommes de variables Gaussiennes indépendantes (pas besoin d'évoquer ici le théorème central limite), $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ suivent des lois normales, de moyennes

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(X_i) = 68000 \text{ et } \mathbb{E}(\overline{Y}) = \mathbb{E}(Y_i) = 81000,$$

et de variances

$$\text{Var}(\overline{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\text{Var}(X_i}{n} = \frac{6000^2}{100} = 600^2$$

et $\text{Var}(\overline{Y}) = 800^2$. On veut maintenant calculer $\mathbb{P}(\overline{Y} - \overline{X} > 15000)$. Or on sait que la différence de deux lois normales indépendantes suit (encore) une loi normale, de moyenne

$$\mu = \mathbb{E}(\overline{Y} - \overline{X}) = \mathbb{E}(\overline{Y}) - \mathbb{E}(\overline{X}) = 81000 - 68000 = 13000,$$

et de variance

$$\sigma^2 = \text{Var}(\overline{Y} - \overline{X}) = \text{Var}(\overline{Y}) + \text{Var}(-\overline{X}) = 600^2 + 800^2 = 1000^2.$$

Aussi, $\overline{Y} - \overline{X} = \mu + \sigma Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et donc

$$\mathbb{P}(\overline{Y} - \overline{X} > 15000) = \mathbb{P}\left(\mu + \sigma Z > 15000\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{15000 - \mu}{\sigma}\right) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

soit ici

$$\mathbb{P}(\overline{Y} - \overline{X} > 15000) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{15000 - 13000}{1000}\right) = \mathbb{P}\left(Z > 2\right) = \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

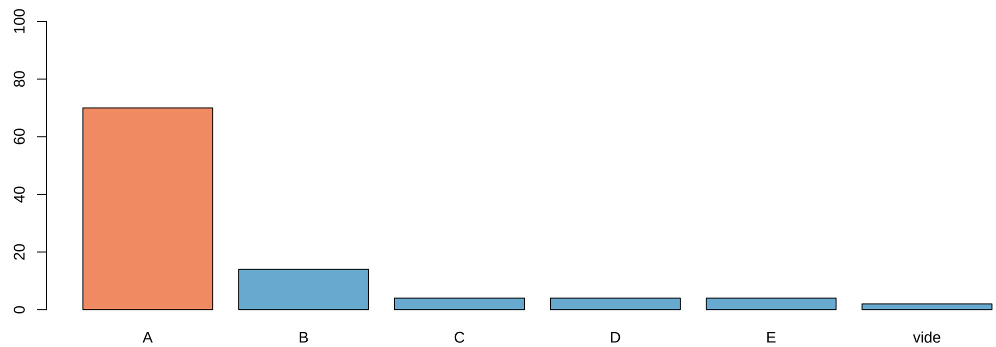
Bon, cette probabilité on la connaît par coeur avec le cours de stats, car on sait que $\mathbb{P}\left(|Z| > 2\right) \sim 5\%$, de telle sorte que (par symmétrie de la loi normale) $\mathbb{P}\left(Z > 2\right) \sim 2.5\%$. Mais on peut regarder dans la table fournie en appendice,

1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

soit ici $\mathbb{P}(Z \leq 2.0) \sim 97.72\%$, et donc $\mathbb{P}(Z > 2.0) \sim 2.275\%$, qui est la réponse A.

$\boxed{24}$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale avec $\mu_X = 3$, $\mu_Y = 5$, $\sigma_X = 3$ et $\sigma_Y = 4$.

Trouver la probabilité que $Y - X$ soit plus grand que 7.



A) 0.03 B) 0.16 C) 0.42 D) 0.84 E) 0.97

La différence entre deux lois normales indépendantes est encore une variable Gaussienne, de moyenne

$$\mu = \mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = 2$$

et de variance

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y + (-X)) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(-X) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 5^2.$$

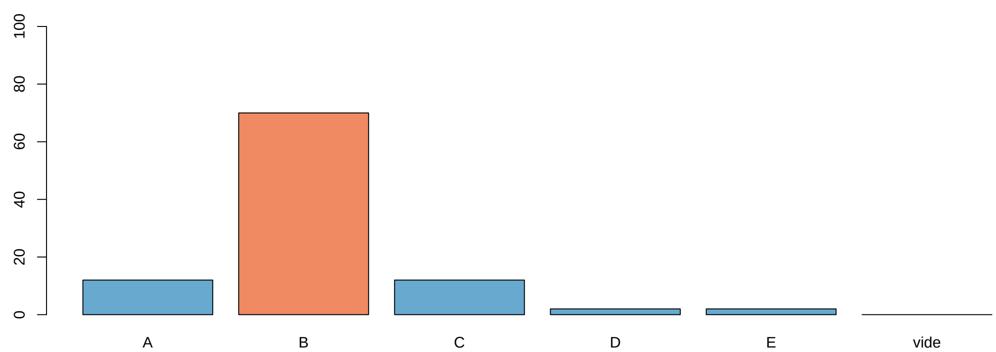
Aussi, $Y - X = \mu + \sigma Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, et donc

$$p = \mathbb{P}(Y - X > 7) = \mathbb{P}(\mu + \sigma Z > 7) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{7-\mu}{\sigma}\right) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

avec ici $(7-\mu)/\sigma = 1$. Par symmétrie de la loi normale (centrée et réduite) $\mathbb{P}(Z > 1) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1)$, soit, si on lit la table donnée en appendice,

0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830

soit ici $\mathbb{P}(Z > 1) \sim 15.865\%$, qui est la réponse E.



$\boxed{25}$ Dans un grand groupe de personnes on suppose que la grandeur des hommes (respectivement des femmes) suit une loi normale de moyenne 175 cm (respectivement 168 cm) et d'écart-type 8 cm (respectivement 6 cm). Pour la danse d'ouverture d'un bal, on choisit au hasard 5 hommes et 5 femmes et formons 5 couples. Trouver la probabilité que dans les cinq couples les femmes soient toujours plus petites que leur partenaire.

A) 99% B) 75% C) 52% D) 9% E) 25%

Soient M et F les tailles respectives d'un homme et d'une femme pris au hasard, et posons $p = \mathbb{P}(M > F)$, ou encore $\mathbb{P}(M - F > 0)$. Or par indépendance, $M - F$ suit une loi normale (cf. question précédante), dont les paramètres sont

$$\mu = \mathbb{E}(M - F) = \mathbb{E}(M) - \mathbb{E}(F) = 175 - 168 = 7 \text{ (cm.)}$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(M - F) = \text{Var}(M) + \text{Var}(F) = 8^2 + 6^2 = 100 = 10^2.$$

Aussi $M - F = \mu + \sigma Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et donc

$$p = \mathbb{P}(M > F) = \mathbb{P}\left(\mu + \sigma Z > 0\right) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{\mu}{\sigma}\right) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

avec ici $\mu/\sigma = 0.7$. Par symmétrie de la loi normale (centrée et réduite) $\mathbb{P}(Z > -0.7) = \mathbb{P}(Z \leq 0.7)$, soit, si on lit la table donnée en appendice,

0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133

soit ici $p = \mathbb{P}(Z \leq 0.7) \sim 75.8\%$. On veut maintenant que sur nos 5 couples, les 5 femmes soient plus petites que les 5 hommes, soit p^5. La probabilité recherchée est alors 25.029% qui est la réponse E.

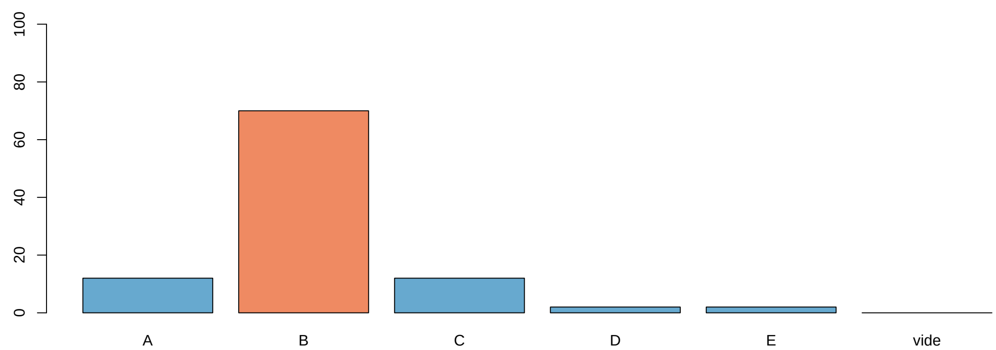
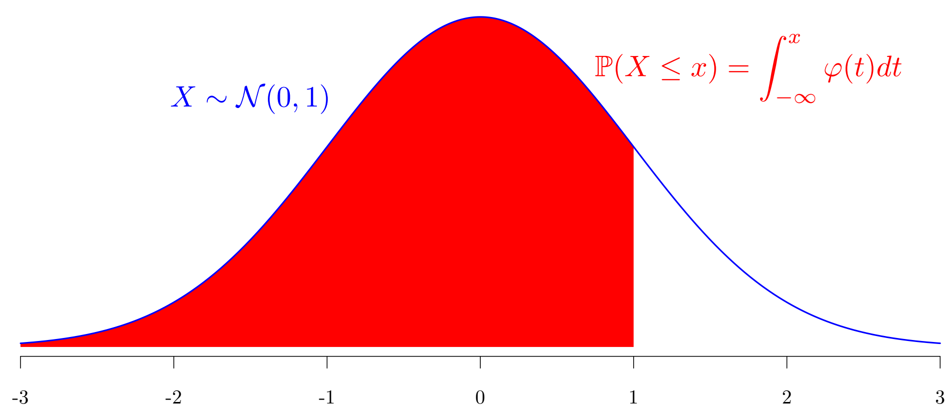


Table de la loi normale La table suivante donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \text{ où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) du$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990